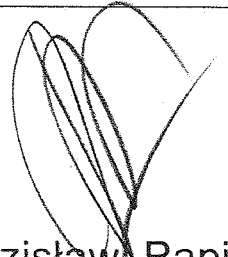


AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. S. STASZICA W KRAKOWIE
SKRYPTY UCZELNIANE
Nr 1410



Zdzisław Papir

Analiza częstotliwościowa sygnałów

Zbiór zadań



WYDAWNICTWA AGH ————— KRAKÓW 1995

1410 pozycja wydawnictw dydaktycznych
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

© Wydawnictwa AGH, Kraków 1995
ISSN 0239-6114

Redaktor Naczelny Uczelnianych Wydawnictw
Naukowo-Dydaktycznych: *prof. dr hab. inż. Zdzisław Kłeczek*
Z-ca Redaktora Naczelnego: *dr inż. Danuta Flisiak*
Recenzent: *prof. dr inż. Antoni Pach*

Skład komputerowy: PDK Kraków, ul. Teligi 16/84

Redakcja Uczelnianych Wydawnictw Naukowo-Dydaktycznych
al. Mickiewicza 30, paw. A-1, pok. 129, 30-059 Kraków
tel. 17-32-28, tel./fax 36-40-38



Druk i oprawa: Drukarnia Narodowa
Kraków, ul. Marszałka J. Piłsudskiego 19

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA	5
1. SZEREG FOURIERA	11
1.1. Wyznaczanie szeregów Fouriera	14
1.2. Rozwinięcia ortogonalne	22
1.3. Zadania różne	31
2. PRZEKSZTAŁCENIE FOURIERA	37
2.1. Wyznaczanie transformat Fouriera	44
2.2. Twierdzenia i tożsamości	50
2.3. Parametry sygnałów	66
2.4. Filtracja sygnałów	76
2.5. Próbkowanie sygnałów	84
2.6. Właściwości energetyczne sygnałów	102
2.7. Wzór sumacyjny Poissona	129
3. PRZEKSZTAŁCENIE HILBERTA	134
3.1. Wyznaczanie transformat Hilberta	135
3.2. Twierdzenia	137
3.3. Sygnały wąskopasmowe	145
LITERATURA	156

PRZEDMOWA

“Analiza częstotliwościowa sygnałów - zbiór zadań” jest przeznaczona dla słuchaczy wydziałów elektrycznych, a w szczególności dla kierunku studiów “Elektronika i Telekomunikacja”. Autor ma nadzieję, że zbiór ten będzie również stanowić pomoc dydaktyczną dla pracowników prowadzących zajęcia związane z teorią i przetwarzaniem sygnałów, bo odpowiednie polskie podręczniki takich zadań nie zawierają.

Prezentowane zadania i problemy Autor od wielu już lat wykorzystuje w zajęciach dotyczących teorii sygnałów oraz podstaw modulacji i detekcji prowadzonych przez niego dla studentów II i III roku specjalności “Telekomunikacja” na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Elektroniki Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie.

Zadania zostały podzielone na trzy grupy tematyczne związane kolejno z szeregiem Fouriera, przekształceniem Fouriera oraz przekształceniem Hilberta. Poszczególne grupy są poprzedzone wstępem teoretycznym podającym podstawowe zależności oraz twierdzenia, które mają ułatwić dalszą samodzielną pracę.

Wykorzystywane w zbiorze metody analizy matematycznej zostały ograniczone do podstawowych twierdzeń z rachunku różniczkowego oraz całkowego funkcji jednej zmiennej.

Każde zadanie zamieszczone w zbiorze zostało omówione i rozwiązane. Stopień trudności problemów jest zróżnicowany. Większość zadań może być rozwiązywana przez studentów samodzielnie, ale niektóre z nich wymagają pomocy prowadzącego zajęcia. Dla ułatwienia lektury koniec tematu zadania został zaznaczony symbolem ●, zaś koniec rozwiązania symbolem ■.

WYKAZ OZNACZEŃ

a_n	– n -ty współczynnik cosinusowy trygonometrycznego szeregu Fouriera
$A(\omega)$	– widmo amplitudowe
b_n	– n -ty współczynnik sinusowy trygonometrycznego szeregu Fouriera
E	– energia sygnału
$\mathcal{G}_m$	– część urojona
F	– przekształcenie Fouriera
F^{-1}	– odwrotne przekształcenie Fouriera
$h(t)$	– odpowiedź impulsowa filtru
$H(\omega)$	– transmitancja filtru
H	– przekształcenie Hilberta
$\mathcal{U}(z)$	– funkcja skoku jednostkowego

$$\mathcal{U}(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

j	– jednostka urojona, $j^2 = -1$
$J_n(\Delta\varphi)$	– funkcja Bessela n -tego rzędu
P	– moc sygnału
$\mathcal{R}_e$	– część rzeczywista
$r(\tau)$	– funkcja autokorelacji realizacji procesu losowego
$R(\tau)$	– funkcja autokorelacji
$s(\omega)$	– widmowa gęstość mocy realizacji procesu losowego
$S(\omega)$	– widmowa gęstość energii lub mocy
$Sa(z)$	– funkcja próbkująca

$$Sa(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

$\text{sgn}(z)$	– funkcja “znak”
-----------------	------------------

$$\text{sgn}(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ -1, & z < 0 \end{cases}$$

T	– horyzont obserwacji sygnału, okres próbkowania sygnału
T_0	– horyzont obserwacji sygnału, okres próbkowania sygnału
W	– szerokość widma sygnału
$x(t)$	– sygnał
$x_c(t)$	– składowa synfazowa sygnału
$x_s(t)$	– składowa kwadraturowa sygnału
$x_+(t)$	– sygnał analityczny skojarzony z sygnałem $x(t)$
$\hat{x}(t)$	– transformata Hilberta, sygnał kwadraturowy
$x_T(t)$	– sygnał obcięty do przedziału czasu $ t \leq T$
$X(\omega)$	– transformata Fouriera, widmo
$X_+(\omega)$	– transformata Fouriera sygnału analitycznego
$X_T(\omega)$	– transformata Fouriera sygnału obciętego
$ X(\omega) $	– widmo amplitudowe sygnału
X_n	– n -ty współczynnik wykładniczego szeregu Fouriera
$y(t)$	– sygnał
$Y(\omega)$	– transformata Fouriera
$\delta(z)$	– impuls Diraca
$\delta_\alpha(z)$	– grzebień Diraca o okresie α

$$\delta_\alpha(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n(z - n\alpha)$$

$\Delta\varphi$	– dewiacja fazy
$\Lambda_\alpha(z)$	– impuls trójkątny o szerokości α

$$\Lambda_\alpha(z) = \begin{cases} 1 - \frac{2|z|}{\alpha}, & |z| \leq \frac{\alpha}{2} \\ 0, & |z| > \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$\Pi_\alpha(z)$	– impuls prostokątny o szerokości α
-----------------	--

$$\Pi_\alpha(z) = \begin{cases} 1, & |z| \leq \frac{\alpha}{2} \\ 0, & |z| > \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

θ	– kąt przesunięcia fazowego
$\varphi(\omega)$	– widmo fazowe sygnału

ω_m	– częstotliwość modulująca
ω_0	– częstotliwość podstawowa, środkowa, nośna
Ω	– częstotliwość graniczna
$\Leftrightarrow$	– para transformat
$\equiv$	– tożsamość
$\langle \rangle$	– operacja uśredniania po czasie
$*$	– splot
$*$	– sprzężenie, próbkowanie
$\propto$	– proporcjonalność
■	– oznaczenie końca rozwiązania zadania
●	– oznaczenie końca tematu zadania

ROZDZIAŁ 1

SZEREG FOURIERA

Zakładamy, że sygnał $x(t)$ o wartościach rzeczywistych jest całkowny z kwadratem w przedziale $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$, tzn. istnieje całka $\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt$. Wówczas wykładniczy (zespolony) szereg Fouriera sygnału $x(t)$ jest zbieżny do tego sygnału w przedziale $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$ we wszystkich jego punktach ciągłości

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1.1)$$

$$|t| \leq \frac{T_0}{2}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Wielkości X_n nazywamy współczynnikami wykładniczego (zespolonego) szeregu Fouriera sygnału $x(t)$.

Postać wykładnicza szeregu Fouriera, aczkolwiek wygodna w zastosowaniach teoretycznych, nie oddaje jego charakteru tak wyraźnie jak postać trygo-

nometryczna. Postać trygonometryczną szeregu Fouriera otrzymujemy z postaci wykładniczej (1.1) biorąc pod uwagę, że $X_{-n} = X_n^*$, $X_n = |X_n|e^{j\theta_n}$ oraz $2\cos\omega_0 t = e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}$

$$x(t) = X_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (1.2)$$

$$|t| \leq \frac{T_0}{2}$$

Zależność (1.2) ma prostą interpretację - sygnał $x(t)$ został rozłożony na sumę składowej stałej X_0 oraz nieskończonej liczby przebiegów harmonicznym o częstotliwościach $n\omega_0$, amplitudach $2|X_n|$ i kątach przesunięcia fazowego θ_n .

Niekiedy posługujemy się także rozwiniętą postacią trygonometryczną szeregu Fouriera

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1.3)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt, \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$$|t| \leq \frac{T_0}{2}$$

Szereg Fouriera jest zbieżny do sygnału tylko w przyjętym przedziale rozwinięcia $\left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$, poza tym przedziałem zbieżność nie musi zachodzić. Rozwinięcie sygnału w szereg Fouriera w nowym przedziale czasu wymaga ponownego obliczenia wszystkich współczynników szeregu Fouriera.

Zauważmy jeszcze, że szereg Fouriera sygnału jest funkcją okresową o okresie T_0 , co oznacza, że poza przedziałem rozwinięcia stanowi on okresowe przedłużenie sygnału $x(t)$. Tylko w przypadku, gdy sygnał $x(t)$ jest sygnałem okresowym o okresie T_0 , jego szereg Fouriera (wyznaczony za okres sygnału T_0) jest równy temu sygnałowi w całym przedziale zmienności czasu.

Obliczając współczynniki szeregu Fouriera dla sygnału okresowego, możemy przyjąć we wzorach (1.1) i (1.3) dowolne granice całkowania (niekoniecznie symetryczne), ale obejmujące cały okres rozwijanego sygnału. Umiejętny dobór granic pozwala niekiedy uprościć obliczenia.

Współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera są związane z sygnałem poprzez związki całkowe (1.1). Twierdzenie Parsevala wiąże sygnał z współczynnikami jego wykładniczego szeregu Fouriera w inny sposób, a mianowicie

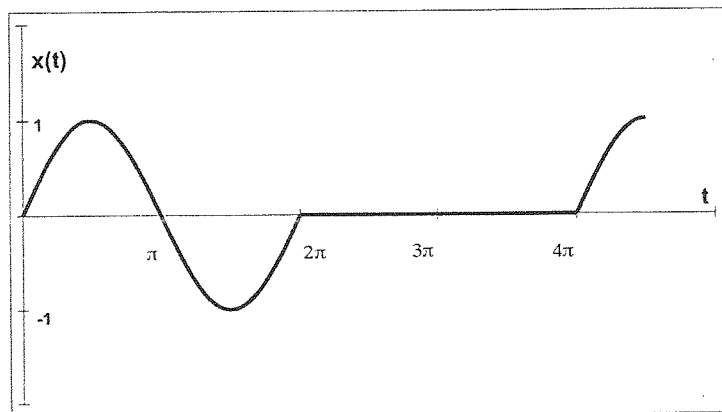
$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \quad (1.4)$$

Widmem sygnału okresowego $x(t)$ nazywamy zbiór $\{X_n : n = 0, \pm 1, \dots\}$ współczynników rozwinięcia tego sygnału w wykładniczy szereg Fouriera.

Założmy, że $X_n = |X_n|e^{j\theta_n}$. Widmem amplitudowym sygnału okresowego $x(t)$ nazywamy zbiór $\{|X_n| : n = 0, \pm 1, \dots\}$, a widmem fazowym - zbiór $\{|\theta_n| : n = 0, \pm 1, \dots\}$.

1.1. Wyznaczanie szeregów Fouriera

1. Przebieg okresowy jest wytwarzany przez eliminację w przebiegu sinusoidalnym co drugiego okresu. Przekształcenie sygnału ilustruje rysunek 1.1.



Rys. 1.1. Przebieg sinusoidalny z usuniętym co drugim okresem

Wyznaczyć wykładniczy szereg Fouriera nowego przebiegu. ●

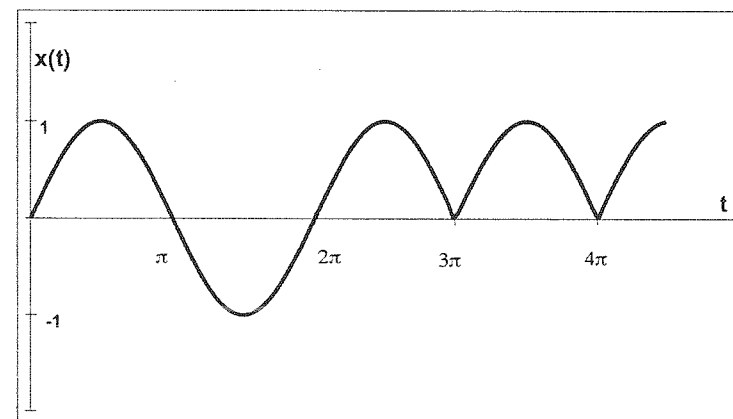
$$X_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin t e^{-jn\frac{\pi}{2}t} dt = \frac{(-1)^n - 1}{\pi(n^2 - 4)}, \quad n \neq \pm 2$$

$$X_{\pm 2} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin t e^{\pm j2t} dt = \pm \frac{j}{4}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$x(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq \pm 2}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi(n^2 - 4)} e^{jn\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{2} \sin t$$

2. W sygnale sinusoidalnym $\sin t$ prostowany jest co drugi okres. Otrzymany przebieg jest pokazany na rysunku 1.2.



Rys. 1.2. Przebieg sinusoidalny z wyprostowanym co drugim okresem

Wyznaczyć wykładniczy szereg Fouriera nowego przebiegu. ●

Dla $n = \pm 2$ otrzymujemy

$$X_n = \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{3\pi} \sin t e^{-jn\frac{\pi}{2}t} dt - \int_{3\pi}^{4\pi} \sin t e^{-jn\frac{\pi}{2}t} dt \right] = \frac{2(e^{jn\frac{\pi}{2}} + 1)}{\pi(4 - n^2)}$$

$$x(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq \pm 2}}^{\infty} \frac{2(e^{jn\frac{\pi}{2}} + 1)}{\pi(4 - n^2)} e^{jn\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{2} \sin t$$

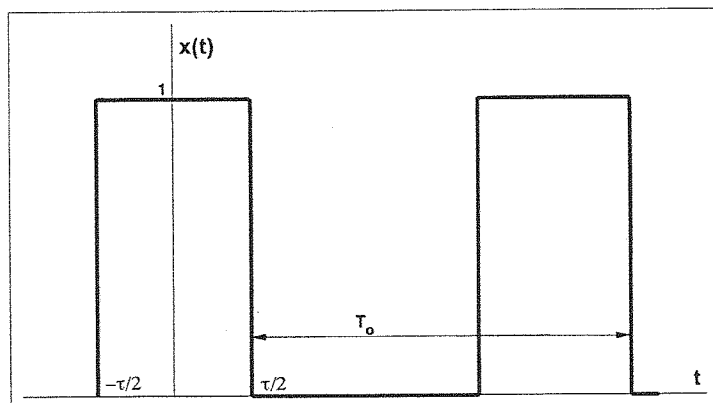
Współczynniki $X_{\pm 2} = \pm \frac{j}{2}$ powinny być wyznaczone w osobnych rachunkach. ■

3. Wyznaczyć wykładniczy szereg Fouriera sygnału $|\sin \pi t|$. ●

$$X_n = \int_0^1 \sin \pi t e^{-j2n\pi t} dt = \frac{2}{\pi(1 - 4n^2)}$$

$$|\sin \pi t| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} e^{j2n\pi t}$$

4. Wyznaczyć wykładniczy szereg Fouriera fali prostokątnej o okresie T_0 ; czas trwania impulsu wynosi τ . Przebieg sygnału jest pokazany na rysunku 1.3. ●



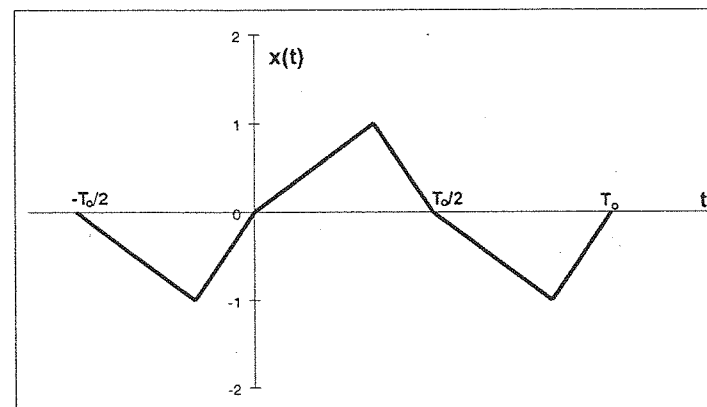
Rys. 1.3. Okresowa fala prostokątna

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{\sin n\pi\epsilon}{n\pi} = \epsilon \text{Sa}(n\pi\epsilon), \quad \epsilon = \frac{\tau}{T_0}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon \text{Sa}(n\pi\epsilon) e^{-jn\omega_0 t}$$

5. Wykazać, że trygonometryczny szereg Fouriera odpowiadający sygnałowi o tzw. symetrii obrotowej (*rotation symmetry*) zawiera wyłącznie harmoniczne nieparzyste. Sygnał ma symetrię obrotową, jeżeli jest spełniony warunek $x(t) = -x(t + \frac{T_0}{2})$. Warunek ten oznacza, że przebieg sygnału w sąsiednich

połówkach okresu jest jednakowy, ale z przeciwnym znakiem. Przykładowy przebieg sygnału o symetrii obrotowej jest pokazany na rysunku 1.4. ●



Rys. 1.4. Sygnał okresowy z symetrią obrotową

Rozpisujemy zależność określającą współczynniki trygonometrycznego szeregu Fouriera

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \\ &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 x(t) \cos n\omega_0 t dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \\ &= -\frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 x(t + \frac{T_0}{2}) \cos n\omega_0 t dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \\ &= -\frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(\tau) \cos n\omega_0 (\tau - \frac{T_0}{2}) d\tau + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(\tau) \cos(n\omega_0\tau - n\pi) d\tau + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \\
&= -(-1)^n \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt
\end{aligned}$$

Powyższe wyrażenie jest równe zero dla parzystych wartości n . W podobny sposób możemy stwierdzić, że również $b_n = 0$ dla parzystych wartości n . ■

6. Wyznaczyć wykładniczy szereg Fouriera dla sygnału nazywanego “grzebie-niem” Diraca $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ - ciągu impulsów Diraca powtarzanych z okresem T . ●

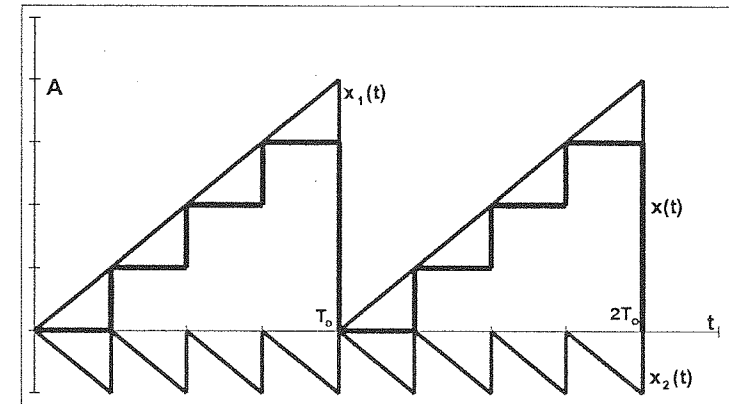
W obliczeniach korzystamy z właściwości próbkującej impulsu Diraca ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$).

$$\begin{aligned}
X_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) dt = \frac{1}{T} \\
\delta_T(t) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}
\end{aligned}$$

7. Znaleźć rozwinięcie w trygonometryczny szereg Fouriera N -schodkowego sygnału piłokształtnego pokazanego na rysunku 1.5. Sygnał schodkowy należy przedstawić w postaci sumy dwóch sygnałów piłokształtnych o odpowiednio dobranych okresach. ●

Przebieg schodkowy $x(t)$ jest sumą dwóch przebiegów piłokształtnych - $x_1(t)$ o okresie T_0 (jest to również okres przebiegu schodkowego) i amplitudzie A oraz $x_2(t)$ o okresie T (jest to także czas trwania pojedynczego schodka, $T_0 = NT$) i amplitudzie A/N

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



Rys. 1.5. Sygnał schodkowy jako złożenie dwóch sygnałów piłokształtnych

Korzystając z rozwinięcia sygnału piłokształtnego w szereg Fouriera, otrzymujemy

$$x_1(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 t)}{n}$$

Podobnie

$$x_2(t) = -\frac{A}{2N} + \frac{A}{2N\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nN\omega_0 t)}{n}$$

Zadanie pokazuje, że znając szeregi Fouriera sygnałów prostszych, można utworzyć rozwinięcie w szereg Fouriera sygnału o bardziej skomplikowanym kształcie. ■

8. Rozwinąć w trygonometryczny szereg Fouriera sygnał $x(t) = t^2$ w przedziale $[-\pi, \pi]$. Przyjmując w otrzymanym rozwinięciu $t = \pi$, wyrazić w postaci nieskończonego szeregu liczbowego liczbę $\pi^2/6$. ●

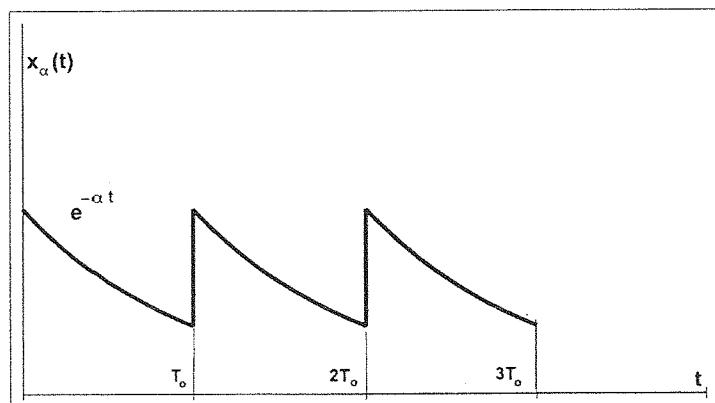
Poszukiwane rozwinięcie ma postać

$$x(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2}$$

Po podstawieniu do powyższego rozwinięcia wartości $t = \pi$ otrzymujemy szereg liczbowy

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

9. Wykładniczy sygnał okresowy $x_{\alpha}(t)$ pokazany na rysunku 1.6 jest sygnałem wejściowym filtru dolnoprzepustowego o transmitancji $H(s) = \frac{1}{1 + Ts}$.



Rys. 1.6. Wykładniczy sygnał okresowy

Wyznaczyć sygnał na wyjściu filtru. ●

Sygnał wejściowy filtru $x_{\alpha}(t)$ przedstawiamy w postaci wykładniczego szeregu Fouriera.

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-\alpha t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-(\alpha + jn\omega_0)t} dt = \frac{e^{-(\alpha + jn\omega_0)t} \Big|_0^{T_0}}{-T_0(\alpha + jn\omega_0)}$$

$$X_n = \frac{1 - e^{-\alpha T_0}}{T_0(\alpha + jn\omega_0)}$$

$$x_{\alpha}(t) = \frac{1 - e^{-\alpha T_0}}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + jn\omega_0} e^{jn\omega_0 t}$$

Odpowiedzią filtru o transmitancji $H(s)$ na sygnał wykładniczy $e^{j\omega_0 t}$ jest sygnał wykładniczy $H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t}$. Odpowiedź filtru na sygnał wejściowy $x_{\alpha}(t)$ wyraża się wobec tego zależnością

$$y(t) = \frac{1 - e^{-\alpha T_0}}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + jn\omega_0} \frac{1}{1 + jn\omega_0 T} e^{jn\omega_0 t}$$

Rozbijając ułamek wewnątrz sumy na ułamki proste, otrzymujemy wyrażenie

$$y(t) = \frac{1}{1 - \alpha T} \frac{1 - e^{-\alpha T_0}}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + jn\omega_0} e^{jn\omega_0 t} + \\ - \frac{T}{1 - \alpha T} \frac{1 - e^{-\alpha T_0}}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + jn\omega_0 T} e^{jn\omega_0 t}$$

Przekształcając otrzymujemy

$$y(t) = \frac{1}{1 - \alpha T} \left[x_{\alpha}(t) - \frac{1 - e^{-\alpha T_0}}{1 - e^{-\frac{T}{T}}} x_{\frac{1}{T}}(t) \right]$$

Okazuje się, że sygnał wyjściowy filtru jest złożeniem dwóch okresowo powtarzanych przebiegów wykładniczych o różnych szybkościach zanikania. ■

10. W teorii modulacji rozważa się sygnał jednotonowej modulacji kąta fazowego $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \Delta \varphi \sin \omega_m t)$, gdzie ω_0 jest częstotliwością nośną, $\omega_m \ll \omega_0$ jest częstotliwością sinusoidalnego sygnału modulującego, a $\Delta \varphi$ jest parametrem modulacji (dewiacją fazy). Interesuje nas widmo tego sygnału, zwróćmy jednak uwagę, że sygnał $x(t)$ nie jest sygnałem okresowym i bezpośrednie zastosowanie szeregu Fouriera nie jest możliwe.

Zauważmy, że zachodzi związek

$$x(t) = A \Re \left[e^{j(\omega_0 + \Delta \varphi \sin \omega_m t)} \right] = A \Re \left[e^{j\Delta \varphi \sin \omega_m t} e^{j\omega_0 t} \right]$$

Sygnał $e^{j\Delta\varphi\sin\omega_m t}$ jest sygnałem okresowym o okresie $T = 2\pi/\omega_m$. Korzystając z rozkładu tego sygnału w wykładniczy szereg Fouriera, wyznaczyć widmo sygnału modulacji kąta fazowego $x(t)$. ●

Zapisujemy wykładniczy szereg Fouriera dla sygnału $e^{j\Delta\varphi\sin\omega_m t}$

$$e^{j\Delta\varphi\sin\omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Delta\varphi) e^{jn\omega_m t}$$

Współczynniki $J_n(\Delta\varphi)$ szeregu są określone całką

$$J_n(\Delta\varphi) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\Delta\varphi\sin\omega_m t} e^{-jn\omega_m t} dt$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Całka ta określa funkcję Bessela pierwszego rodzaju, n -tego rzędu. Wartości tej funkcji są tablicowane w zależności od parametru $\Delta\varphi$ i rzędu n .

W dalszym ciągu możemy zapisać

$$x(t) = A \Re \left\{ \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Delta\varphi) e^{jn\omega_m t} \right] e^{j\omega_0 t} \right\} = A \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Delta\varphi) e^{j(\omega_0 + n\omega_m)t} \right\}$$

$$x(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\Delta\varphi) \cos(\omega_0 + n\omega_m)t$$

Otrzymaliśmy rozkład sygnału $x(t)$ na harmoniczne o częstotliwościach $\omega_0 + n\omega_m$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - jednakże nie jest to szereg Fouriera. ■

1.2. Rozwinięcia ortogonalne

11. Wykładniczy szereg Fouriera oraz odpowiadający mu szereg trygonometryczny jest użytecznym przykładem reprezentacji oryginalnego sygnału $x(t)$ w przedziale $[a, b]$ przez układ sygnałów ortogonalnych $\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}$. Mówimy, że układ rzeczywistych funkcji $\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}$ jest orto-

gonalny, gdy spełniają one warunek

$$\int_a^b g_i(t) g_j(t) dt = 0, \quad i \neq j$$

$$\int_a^b g_i(t) g_i(t) dt = K_i \quad (i)$$

Sygnał oryginalny aproksymujemy kombinacją liniową przebiegów ortogonalnych

$$x(t) \approx \bar{x}(t) = c_1 g_1 + c_2 g_2 + \dots + c_n g_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i g_i(t) \quad (ii)$$

Miarę błędu aproksymacji $x(t) - \bar{x}(t)$ definiujemy jako

$$e = \int_a^b [x(t) - \bar{x}(t)]^2 dt = \int_a^b \left[x(t) - \sum_{i=1}^n c_i g_i(t) \right]^2 dt \quad (iii)$$

Wykazać, że współczynniki c_i aproksymacji ortogonalnej zapewniające minimum miary błędu aproksymacji dane są zależnością

$$c_i = \frac{\int_a^b x(t) g_i(t) dt}{\int_a^b g_i^2(t) dt} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (iv)$$

Wykazać, że minimalna wartość miary błędu aproksymacji wynosi

$$e_{\min} = \int_a^b x^2(t) dt - \sum_{i=1}^n c_i^2 K_i$$

oraz udowodnić, że spełniony jest warunek $\lim_{n \rightarrow \infty} e_{\min} = 0$ pozwalający dla przeliczalnego układu funkcji ortogonalnych $\{g_1(t), g_2(t), \dots\}$ przedstawiać

sygnał oryginalny w postaci $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i(t)$.

Wykazać również, że błąd aproksymacji ortogonalnej $x(t) - \tilde{x}(t)$ jest ortogonalny względem funkcji układu $\{g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)\}$

$$\int_a^b [x(t) - \tilde{x}(t)] g_i(t) dt = 0 \quad (\text{v})$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Warunkiem koniecznym minimum miary błędu aproksymacji jest, by $\delta e / \delta c_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Korzystając z warunku ortogonalności (i), możemy stosunkowo łatwo wyodrębnić w definicji miary błędu aproksymacji (iii) składniki uzależnione wyłącznie od współczynnika c_i

$$e(c_i) = -2c_i \int_a^b x(t) g_i(t) dt + 2c_i^2 \int_a^b g_i^2(t) dt$$

Rozwiązując dla powyższego trójmianu warunek $\delta e / \delta c_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ otrzymujemy wprost związek (iv) określający optymalne wartości współczynników aproksymacji ortogonalnej. Nietrudno jest także sprawdzić warunek dostateczny.

Po uwzględnieniu zależności (iv) we wzorze (iii) otrzymujemy minimalną wartość miary błędu aproksymacji

$$e_{\min} = \int_a^b x^2(t) dt - \sum_{i=1}^n c_i^2 K_i$$

Zauważmy teraz, że z definicji błędu kwadratowego wynika, że $e_{\min} \geq 0$, a więc i prawa strona powyższego wyrażenia pozostaje nieujemna. Z drugiej

strony $c_i^2 \geq 0$ oraz $K_i \geq 0$, a więc wartość wyrażenia $\sum_{i=1}^n c_i^2 K_i$ może tylko rosnąć przy zwiększaniu długości aproksymacji n . Te dwa warunki można

pogodzić tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^n c_i^2 K_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b x^2(t) dt$, z czego wynika możliwość reprezentacji sygnału oryginalnego w postaci szeregu sygnałów ortogonalnych $x(t) = \tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i g_i(t)$.

Dowód zależności (v) nie jest skomplikowany, gdyż

$$\int_a^b [x(t) - \tilde{x}(t)] g_i(t) dt = \int_a^b x(t) g_i(t) dt - \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n c_k g_k(t) \right] g_i(t) dt = 0$$

na mocy zależności (i) oraz (iv).

Otrzymane wyniki można uogólnić na przypadek, gdy zarówno sam przebieg oryginalny $x(t)$ jak i przebiegi ortogonalne $g_1(t), g_2(t), \dots$ przyjmują wartości zespolone. W takim przypadku ortogonalność sygnałów określa się w sposób następujący

$$\int_a^b g_i(t) g_j^*(t) dt = 0, \quad i \neq j$$

$$\int_a^b g_i(t) g_i^*(t) dt = K_i$$

Optymalne współczynniki aproksymacji ortogonalnej są określone zależnością

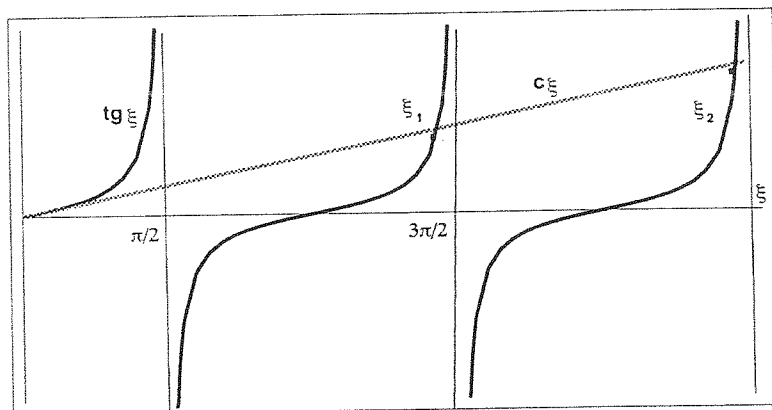
$$c_i = \frac{\int_a^b x_i(t) g_i^*(t) dt}{\int_a^b g_i(t) g_i^*(t) dt} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Przykładem ortogonalnego, przeliczalnego układu funkcji zespolonych jest układ $\{\exp(jn\omega_0 t): n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, t \in [t_0, t_0 + 2\pi/\omega_0]\}$ wykorzystywany w konstrukcji wykładniczego szeregu Fouriera. ■

12. Rozważmy równanie przestępne $\operatorname{tg} \xi = c\xi$. Oznaczmy dodatnie pierwiastki tego równania przez $\xi_1, \xi_2, \dots$. Wykazać, że nieskończony układ funkcji $\{\sin \xi_1 x, \sin \xi_2 x, \dots\}$ jest ortogonalny w przedziale $x \in [0, 1]$. ●

W celu wykazania ortogonalności układu funkcji $\{\sin \xi_1 x, \sin \xi_2 x, \dots\}$ obliczymy wartość całki oznaczonej

$$I = \int_0^1 \sin \alpha x \sin \beta x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x] dx$$



Rys. 1.8. Rozwiązanie równania przestępnego $\operatorname{tg} \xi = c\xi$

W dalszym ciągu po elementarnych rachunkach otrzymujemy

$$I = \left[\frac{\sin(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\sin(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} \right]_0^1 = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2(\alpha + \beta)}$$

$$I = \frac{\beta \sin \alpha \cos \beta - \alpha \cos \alpha \sin \beta}{\alpha^2 - \beta^2} = \cos \alpha \cos \beta \frac{\beta \operatorname{tg} \alpha - \alpha \operatorname{tg} \beta}{\alpha^2 - \beta^2}$$

Obliczamy wartość całki I dla $\alpha = \xi_i$ oraz $\beta = \xi_j$. Mamy

$$I = \cos \xi_i \cos \xi_j \frac{\xi_j \operatorname{tg} \xi_i - \xi_i \operatorname{tg} \xi_j}{\xi_i^2 - \xi_j^2} = \cos \xi_i \cos \xi_j \frac{c \xi_j \xi_i - c \xi_i \xi_j}{\xi_i^2 - \xi_j^2} = 0$$

z uwagi na to, że liczby ξ_i oraz ξ_j są rozwiązaniami równania $\operatorname{tg} \xi = c\xi$. Zerowanie się wartości całki I potwierdza ortogonalność wyjściowego układu funkcji $\{\sin \xi_1 x, \sin \xi_2 x, \dots\}$. ■

13. Niech $Q(x)$ będzie wielomianem potęgowym stopnia niższego od n , a więc $\deg Q(x) < n$. Skonstruować wielomian $V_n(x)$ stopnia n , $\deg V_n(x) = n$, spełniający warunek całkowy

$$\int_a^b V_n(x) Q(x) dx = 0 \quad (i)$$

Warto podkreślić, że wielomiany $V_n(x)$ spełniające warunek (i) są jednocześnie ortogonalne względem siebie $\int_a^b V_n(x) V_m(x) dx = 0$. ●

Wyrażmy wielomian $V_n(x)$ stopnia n jako n -tą pochodną pewnego wielomianu $R(x)$

$$V_n(x) = R^{(n)}(x), \quad \deg R(x) = 2n$$

Całkując przez części, możemy napisać

$$\int_a^b V_n Q dx = \int_a^b R^{(n)} Q dx = \left[Q R^{(n-1)} - Q^{(1)} R^{(n-2)} + \dots \pm Q^{(n-1)} R \right]_a^b \pm \int_a^b Q^{(n)} R dx$$

Zauważmy przede wszystkim, że $\int_a^b Q^{(n)} R dx = 0$, gdyż $Q^{(n)}(x) = 0$, bowiem

zgodnie z założeniem $\deg Q(x) < n$. Żądając teraz spełnienia warunku (i) najprościej jest przyjąć, że

$$R(b) = R^{(1)}(b) = \dots = R^{(n-1)}(b) = 0$$

$$R(a) = R^{(1)}(a) = \dots = R^{(n-1)}(a) = 0$$

Powyższy warunek jest równoważny żądaniu, aby liczby a oraz b były n -krotnymi pierwiastkami wielomianu $R(x)$, $\deg R(x) = 2n$. Tym samym możemy przyjąć

$$R(x) = c_n (x - a)^n (x - b)^n$$

Wielomiany $V_n(x)$, ortogonalne w przedziale $[a, b]$, dane są wobec tego rekurencją

$$V_n(x) = c_n \frac{d^n R(x)}{dx^n} = c_n \frac{d^n [(x-a)^n (x-b)^n]}{dx^n}$$

Na ogół przyjmuje się, że $c_n = 1/[2^n n!]$ (tak dobrana stała zapewnia, że $V_n(1) = 1$ oraz $V_n(-1) = (-1)^n$) oraz $a = -1$ i $b = 1$. Tak otrzymane wielomiany nazywane są wielomianami Legendre'a

$$V_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

■

14. Zbiór impulsów prostokątnych $\{\frac{1}{\sqrt{\tau}} \pi_\tau(t - k\tau): k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ jest prostym układem funkcji ortogonalnych w przedziale czasu $(-\infty, \infty)$; warunek ortogonalności jest oczywisty i nie wymaga sprawdzenia rachunkowego. Wyznacz aproksymację $\tilde{x}(t)$ sygnału $x(t)$ za pomocą opisanego układu funkcji ortogonalnych. ●

Przyjmując, że $g_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \pi_\tau(\tau - k\tau)$, możemy zapisać szereg aproksymujący w postaci

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k g_k(t)$$

przy czym zgodnie z zależnością (iv) z zadania 11

$$c_k = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) g_k(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g_k^2(t) dt} = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{(k-\frac{1}{2})\tau}^{(k+\frac{1}{2})\tau} x(t) dt$$

Poszukiwana aproksymacja przybiera postać

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau} \int_{(k-\frac{1}{2})\tau}^{(k+\frac{1}{2})\tau} x(\theta) d\theta \right) \pi_\tau(t - k\tau) \quad (i)$$

Wyrażenie znajdujące się we wzorze (i) w nawiasach jest wartością średnią sygnału $x(t)$ w przedziale $[(k - \frac{1}{2})\tau, (k + \frac{1}{2})\tau]$.

Intuicyjnie oczekujemy, że $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{x}(t) = x(t)$, gdyż za pomocą węższych impulsów prostokątnych możemy dokładniej oddać przebieg sygnału oryginalnego $x(t)$. Pamiętając o definicji impulsu Diraca jako granicy ciągu impulsów prostokątnych $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \pi_\tau(t)$, możemy - nieco nieformalnie - przedstawić szereg aproksymujący (i) w postaci granicznej $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) \delta(v - t) dv$ mówiącej, że sygnał $x(t)$ można traktować jako "ciągłą" sumę również w sposób "ciągły" przesuniętych i skalowanych impulsów Diraca. ■

15. Dla sygnału $x(t)$ definiujemy sygnał aproksymujący go sumą N pierwszych składników wykładniczego szeregu Fouriera

$$\tilde{x}_N(t) = \sum_{n=-N}^N X_n e^{jn\omega_0 t}$$

Miarę błędu aproksymacji określamy jako

$$e^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} [x(t) - \tilde{x}_N(t)]^2 dt$$

Udowodnić, że miara błędu aproksymacji wyraża się sumą szeregu

$$e^2 = 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |X_n|^2$$

Taki sposób postępowania pozwala aproksymować - przy zadanym stopniu dokładności - sygnał okresowy pierwszymi N składowymi (harmonicznymi) jego szeregu Fouriera. ●

Rozpisując definicję miary błędu aproksymacji otrzymujemy

$$e^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt - \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \tilde{x}(t) dt + \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{x}^2(t) dt$$

Na mocy twierdzenia Parsevala (1.4) pierwszą całkę przedstawiamy w postaci

$$I_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$$

Obliczamy drugą całkę

$$I_2 = 2 \sum_{n=-N}^N \frac{X_n}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{jn\omega_0 t} dt = 2 \sum_{n=-N}^N X_n X_n^* = 2 \sum_{n=-N}^N |X_n|^2$$

Postępując podobnie możemy pokazać, że trzecia całka wynosi

$$I_3 = \sum_{n=-N}^N |X_n|^2$$

Dodając wyrażenia I_1, I_2 oraz I_3 wyznaczamy poszukiwaną miarę błędu aproksymacji (i). ■

1.3. Zadania różne

16. Udowodnić, że współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera sygnału rzeczywistego $x(t) = x^*(t)$ spełniają związek

$$X_{-n} = X_n^*$$

$$X_{-n} = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right]^* = X_n^* \quad (1.10)$$

17. Udowodnić twierdzenie Parsevala dla rzeczywistych sygnałów okresowych

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \quad (1.11)$$

W powyższym związku podstawiamy za sygnał $x(t)$ jego wykładniczy szereg Fouriera, a następnie zamieniamy kolejność całkowania i sumowania. W końcowej fazie dowodu korzystamy z właściwości (1.10).

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n X_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n X_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \end{aligned}$$

18. Sygnał $x(t)$ jest sygnałem okresowym o okresie T_0 przybierającym wartości zespolone. Definiujemy dla tego sygnału funkcję autokorelacji

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t+\tau)dt = \langle x(t)x^*(t+\tau) \rangle$$

Funkcja $R(\tau)$ jest funkcją okresową o okresie T_0 . Rozwinąć funkcję $R(\tau)$ w wykładniczy szereg Fouriera. ●

Sygnał $x^*(t+\tau)$ oraz sygnał $x(t)$ rozwijamy w wykładniczy szereg Fouriera

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$x^*(t+\tau) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0(t+\tau)} \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^* e^{-jn\omega_0(t+\tau)}$$

Obliczamy wartość średnią po czasie z iloczynu powyższych sygnałów

$$\begin{aligned} \langle x(t)x^*(t+\tau) \rangle &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_n X_m^* e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0(t+\tau)} \right\rangle = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_n X_m^* e^{jn\omega_0 \tau} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j\omega_0(n-m)t} dt \end{aligned}$$

Z uwagi na ortogonalność zbioru funkcji $\{e^{jn\omega_0 t} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ dla $t \in [t_0, t_0 + 2\pi/\omega_0]$

$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j\omega_0(n-m)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ 1 & \text{dla } n = m \end{cases}$$

otrzymujemy ostatecznie

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t+\tau)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 e^{jn\omega_0 \tau}$$

19. Wykazać, że pomiędzy współczynnikami wykładniczego szeregu Fouriera sygnału rzeczywistego a współczynnikami jego szeregu trygonometrycznego Fouriera zachodzą związki

$$\begin{aligned} a_n &= X_n + X_n^*, \quad a_0 = X_0 \\ b_n &= j(X_n - X_n^*) \end{aligned}$$

Korzystając z określenia (1.1) współczynników wykładniczego szeregu Fouriera, otrzymujemy

$$X_n + X_n^* = 2\Re \left[\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = a_n$$

W podobny sposób sprawdzamy pozostałą zależność. ■

20. Wykazać, że współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera okresowego rzeczywistego sygnału parzystego są rzeczywiste, a natomiast współczynniki szeregu Fouriera okresowego rzeczywistego sygnału nieparzystego są urojone. ●

Przy założeniu, że rzeczywisty sygnał $x(t)$ jest parzysty, $x(t) = x(-t)$, zachodzi związek (dokonujemy zamiany zmiennych $t = -\tau$)

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(-\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau = X_n^*$$

Ponieważ dla sygnałów rzeczywistych mamy zawsze $X_{-n}^* = X_n$, zatem w rozważanym przypadku sygnału parzystego otrzymujemy związek $X_n^* = X_n$ będący warunkiem rzeczywistości współczynników wykładniczego szeregu Fouriera. Podobnie dowodzimy drugiej części zadania.

Korzystając z wyników zadania 20, możemy także stwierdzić, że trygonometryczny szereg Fouriera sygnału parzystego zawiera wyłącznie wyrazy cosinusowe, a szereg sygnału nieparzystego zawiera tylko wyrazy sinusowe. ■

21. Rozważmy sygnał okresowy $x(t)$ o okresie T_0 , którego trygonometryczny szereg Fouriera nie zawiera harmonicznych o częstotliwościach większych aniżeli $N\omega_0$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Sygnały takie są znane pod nazwą sygnałów okresowych o skończonej szerokości pasma. Wykazać, że rozważany sygnał jest jednoznacznie określony za pomocą jego wartości w $2N+1$ chwilach $t = k\Delta$, $\Delta = T_0/(2N+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ należących do jednego okresu. ●

Zgodnie z założeniem zadania sygnał $x(t)$ może być przedstawiony w postaci

$$x_k = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

Założmy, że znamy wartości sygnału $x(t)$ w chwilach czasu $k\Delta$, gdzie $\Delta = T_0/(2N+1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$. Wartości sygnału $x(t)$ w tych chwilach wynoszą odpowiednio $x(k\Delta) = x_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$.

Tezę zadania udowodnimy, jeżeli pokażemy, że wartość sygnału $x(t)$ w dowolnej chwili t może być wyrażona przez jego wartości $x(k\Delta) = x_k$ w zadanych chwilach czasu $k\Delta$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$. Innymi słowy, zadanie sprowadza się do wyznaczenia związków określających współczynniki Fouriera a_0, a_n, b_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ w zależności od jego próbek $x(k\Delta) = x_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$. Zauważmy, że spełnione są następujące związki

$$x_k = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega_0 k\Delta + b_n \sin n\omega_0 k\Delta)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

W powyższych związkach niewiadomymi są współczynniki a_0, a_n, b_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$. Liczba niewiadomych wynosi $2N+1$; liczba równań jest też równa $2N+1$. W dalszym ciągu, dla wygody rozważań, przyjmujemy podstawienie $\xi_k = \omega_0 k\Delta$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, a więc

$$x_k = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\xi_k + b_n \sin n\xi_k) \quad (i)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$$

Dla rozwiązania powyższego układu równań wykorzystamy tożsamość trygonometryczną¹

$$1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nh = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})h}{\sin \frac{1}{2}h} \quad (ii)$$

Zsumujemy wszystkie równości (i) stronami. Ponieważ punkty $k\Delta$ są rozłożone symetrycznie względem zera, a funkcja sinus jest nieparzysta, to współczynnik stojący przy b_n wynosi

$$\sum_{k=-N}^N \sin n\xi_k = 0$$

To samo można powiedzieć o współczynniku stojącym przy a_n , gdyż z parzystości funkcji cosinus oraz z tożsamości (ii) przy podstawieniu w niej $h = \frac{2n\pi}{2N+1}$ wynika, że

$$\sum_{k=-N}^N \cos n\xi_k = 1 + 2 \sum_{i=1}^N \cos k \frac{2n\pi}{2N+1} = 0 \quad (iii)$$

Zatem

$$a_0 = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x_k$$

1) Tożsamość (ii) dowodzimy, mnożąc obie jej strony przez $2\sin \frac{h}{2}$ i zastępując iloczyn $2\sin \frac{h}{2} \cos kh$ różnicą $\sin(k + \frac{1}{2})h - \sin(k - \frac{1}{2})h$.

W celu wyznaczenia a_m ($1 \leq m \leq N$), pomnóżmy równości (i) odpowiednio przez $\cos m\xi_k$ i ponownie dodajmy je wyraz po wyrazie. Współczynnik przy a_0 jest zerem na mocy (iii), również współczynnik przy b_n równa się zero ze względu na nieparzystość funkcji sinus. Współczynnik przy a_n wynosi

$$\sum_{k=-N}^N \cos n\xi_k \cos m\xi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \cos(n+m)\xi_k + \frac{1}{2} \sum_{k=-N}^N \cos(n-m)\xi_k$$

Przy $n \neq m$ obie sumy po prawej stronie znikają na mocy (iii), a przy $n = m$ pierwsza suma jest zerem, natomiast druga równa się $\frac{2N+1}{2}$. Tak więc tylko współczynnik przy a_m jest różny od zera i równa się $\frac{2N+1}{2}$. Tak więc

$$a_m = \frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x_k \cos m\xi_k = \frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x_k \cos k \frac{2}{2N+1} m\pi$$

Podobnie, mnożąc równości (i) przez $\sin m\xi_k$ i dodając je stronami, znajdujemy

$$b_m = \frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x_k \sin m\xi_k = \frac{2}{2N+1} \sum_{k=-N}^N x_k \sin k \frac{2}{2N+1} m\pi$$

ROZDZIAŁ 2

PRZEKSZTAŁCENIE FOURIERA

Proste przekształcenie Fouriera sygnału $x(t)$ definiujemy całką

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.1)$$

Odwrotne przekształcenie Fouriera jest określone całką

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.2)$$

Dla oznaczenia pary transformat Fouriera będziemy w dalszym ciągu stosować notację

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$$

lub zamiennie

$$\begin{aligned} X(\omega) &= F\{x(t)\} \\ x(t) &= F^{-1}\{X(\omega)\} \end{aligned}$$

Przedstawimy obecnie właściwości przekształcenia Fouriera.

Przyjmujemy w dalszym ciągu, że $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ oraz $y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$.

1. Liniowość

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \Leftrightarrow \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) \quad (2.3)$$

2. Sprzężenie

Dla sygnału $x(t)$ o wartościach zespolonych mamy

$$x^*(t) \Leftrightarrow X^*(-\omega) \quad (2.4)$$

Transformata Fouriera sygnału rzeczywistego $x(t) = x^*(t)$ spełnia wobec tego związek

$$X(\omega) = X^*(-\omega) \quad (2.5)$$

3. Symetria sygnału

Transformata Fouriera sygnału hermitowskiego $x^*(-t) = x(t)$ jest rzeczywista

$$X^*(\omega) = X(\omega) \quad (2.6)$$

Szczególnym przypadkiem sygnału hermitowskiego jest rzeczywisty sygnał parzysty $x(-t) = x(t)$.

Transformata Fouriera sygnału antyhermitowskiego $-x^*(-t) = x(t)$ jest urojona

$$-X^*(\omega) = X(\omega) \quad (2.7)$$

Szczególnym przypadkiem sygnału antyhermitowskiego jest rzeczywisty sygnał nieparzysty $-x(-t) = x(t)$.

4. Widmo amplitudowe oraz fazowe sygnału

Transformatę Fouriera jako funkcję zespoloną możemy przedstawić w postaci wykładniczej

$$x(t) \Leftrightarrow X(-\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

Funkcję $|X(\omega)|$ nazywamy widmem amplitudowym sygnału $x(t)$, zaś funkcję $\varphi(\omega)$ widmem fazowym.

Dla sygnałów rzeczywistych widmo amplitudowe jest funkcją parzystą

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)|$$

a widmo fazowe funkcją nieparzystą

$$-\varphi(-\omega) = \varphi(\omega)$$

5. Symetria przekształcenia

$$X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \quad (2.8)$$

6. Zmiana skali

$$x(\alpha t) \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \quad (2.9)$$

7. Przesunięcie w dziedzinie czasu

$$x(t - t_0) \Leftrightarrow X(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (2.10)$$

8. Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \quad (2.11)$$

Korzystając ze wzorów Eulera otrzymujemy przydatne związki

$$x(t) \cos \omega_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] \quad (2.12)$$

$$x(t) \sin \omega_0 t \Leftrightarrow \frac{j}{2} [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)]$$

9. Splot w dziedzinie czasu

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \Leftrightarrow X(\omega) Y(\omega) \quad (2.13)$$

10. Splot w dziedzinie częstotliwości

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) Y(\omega - \nu) d\nu \quad (2.14)$$

11. Transformata części rzeczywistej i urojonej sygnału

$$\Re\{x(t)\} \Leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega) + X^*(-\omega)] \quad (2.15)$$

$$\Im\{x(t)\} \Leftrightarrow \frac{1}{2j} [X(\omega) - X^*(-\omega)]$$

12. "Pole" pod wykresem funkcji

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0) \quad (2.16)$$

13. Różniczkowanie w dziedzinie czasu

$$\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow j\omega X(\omega) \quad (2.17)$$

Zakres zastosowań twierdzenia (2.17) jest ograniczony z uwagi na dość silny warunek ograniczający - $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} x(t) = 0$.

14. Całkowanie w dziedzinie czasu

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \pi X(0) \delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega} \quad (2.18)$$

15. Różniczkowanie w dziedzinie częstotliwości

$$(-jt)^n x(t) \Leftrightarrow \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n} \quad (2.19)$$

16. Twierdzenie Parsewala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (2.20)$$

17. Twierdzenie Rayleigha

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega) d\omega \quad (2.21)$$

18. Twierdzenie o momentach

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t) dt$$

$$(-j)^n m_n = \frac{d^n X(0)}{d\omega^n} \quad (2.22)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Przydatnym w teorii i praktyce przekształcenia Fouriera jest impuls Diraca (delta Diraca). Impuls Diraca można określić jako funkcjonal przypisujący danej funkcji $x(z)$ wartość jej próbki $x(0)$

$$\delta: x(z) \rightarrow x(0)$$

$$\delta\{x(z)\} = x(0)$$

Przyporządkowanie to zapisuje się w postaci całkowej

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(z) x(z) dz = x(0)$$

Właściwości impulsu Diraca wynikają z powyższej definicji całkowej.

Próbkowanie

$$\int_a^b \delta(z - z_0) x(z) dz = \begin{cases} x(z_0), & z_0 \in [a, b] \\ 0, & z_0 \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.23)$$

Właściwość tę nieformalnie możemy zapisać w postaci

$$\delta(z - z_0) x(z) = x(z) \delta(z - z_0)$$

“Pole” impulsu Diraca:

$$\int_a^b \delta(z - z_0) dz = \begin{cases} 1, & z_0 \in [a, b] \\ 0, & z_0 \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.24)$$

Zmiana skali

$$\delta(\alpha z) = \frac{\delta(z)}{|\alpha|} \quad (2.25)$$

Splot impulsu Diraca z funkcją

$$\delta(z - z_0) * x(z) = x(z - z_0) \quad (2.26)$$

Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

$x(t)$	$X(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\mathbb{1}(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\delta(t)$	1
$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$	$\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_0 T} = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$
$e^{\pm jn\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \pm \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$\Pi_T(t)$	$T \text{Sa} \frac{\omega T}{2}$
$\Lambda_T(t)$	$\frac{T}{2} \text{Sa}^2 \frac{\omega T}{4}$
$\text{Sa}(Wt)$	$\frac{\pi}{W} \Pi_{2W}(\omega)$
$\text{Sa}^2(Wt)$	$\frac{\pi}{W} \Lambda_{4W}(\omega)$
$\mathbb{1}(t) e^{-\alpha t}, \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$
$e^{-\alpha t }, \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
$\frac{1}{t^2 + \alpha^2}$	$\frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha \omega }$

2.1. Wyznaczanie transformat Fouriera

1. Udowodnić, że $(\alpha > 0)$

$$F\{e^{-\alpha|t|}(1 + \alpha|t|)\} = \frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^3}$$

Przyjmijmy oznaczenia: $x(t) = e^{-\alpha|t|}(1 + \alpha|t|)$ oraz $f(t) = \mathcal{A}(t)e^{-\alpha t}(1 + \alpha t)$.

Wobec związku $x(t) = f(t) + f(-t)$ mamy

$$X(\omega) = F(\omega) + F^*(\omega) = \mathcal{R}_e[F(\omega)]$$

Ponieważ $\mathcal{A}(t)e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{(\alpha + j\omega)}$, więc na mocy właściwości (2.19) mamy

$\mathcal{A}(t)te^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{(\alpha + j\omega)^2}$. Wynika stąd że

$$F(\omega) = \frac{1}{(\alpha + j\omega)} + \frac{\alpha}{(\alpha + j\omega)^2}$$

Ostatecznie

$$F\{e^{-\alpha|t|}(1 + \alpha|t|)\} = 2\mathcal{R}_e\left\{\frac{1}{(\alpha + j\omega)} + \frac{\alpha}{(\alpha + j\omega)^2}\right\} = \frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^3}$$

2. Udowodnić, że transformata Fouriera impulsu Gaussa przyjmuje poniższą postać $(\alpha > 0)$

$$e^{-\alpha t^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \quad (i)$$

W dowodzie należy wykorzystać twierdzenie o momentach (2.22) oraz rozwinięcie w szereg potęgowy Maclaurina impulsu Gaussa. ●

Dla impulsu Gaussa zachodzi równość

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (ii)$$

Różniczkując obustronnie całkę niewłaściwą (ii) względem parametru α otrzymujemy związek określający parzyste momenty impulsu Gaussa

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}$$

Momenty nieparzyste impulsu Gaussa są zerowe z uwagi na jego parzystość. Korzystając z twierdzenia o momentach (2.22) możemy rozwinąć w szereg transformatę Fouriera $X(\omega)$ impulsu

$$X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(2\alpha)^n (2n)!} (-j\omega)^{2n}$$

Rozwinięcie to jest szeregiem potęgowym Maclaurina dla transformaty $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$, a więc w istocie

$$F\{e^{-\alpha t^2}\} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

Najbardziej wyrazistą postać omawianej pary transformat otrzymujemy dla $\alpha = \frac{1}{2}$, a mianowicie

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

Analizując wyniki zadania stwierdzamy, że transformata Fouriera impulsu Gaussa zachowuje kształt impulsu. Zwracamy uwagę, że podobną właściwością charakteryzują się grzebień Diraca (patrz tabela transformat Fouriera) oraz wielomiany Hermite'a (patrz zadanie 6).

Alternatywny sposób wyznaczenia transformaty Fouriera impulsu Gaussa został podany w zadaniu 3. ■

3. Udowodnić, że transformata Fouriera impulsu Gaussa przyjmuje poniższą postać ($\alpha > 0$)

$$e^{-\alpha t^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

W dowodzie wykazać, że impuls Gaussa $x(t) = e^{-\alpha t^2}$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2\alpha t x(t) \quad (i)$$

Po dwustronnym transformowaniu równania (i) wyznaczyć rozwiązanie nowego równania różniczkowego; stałą całkowania wyliczyć z tożsamości

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (ii)$$

Sprawdzenie, że impuls Gaussa $x(t) = e^{-\alpha t^2}$ spełnia równanie różniczkowe (i) nie przedstawia trudności. Dwustronne przekształcenie Fouriera (z wykorzystaniem właściwości (2.17) oraz (2.19)) przekształca równanie (i) w równanie różniczkowe w dziedzinie częstotliwości

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2\alpha} \omega X(\omega)$$

Budowa obydwóch równań różniczkowych jest jednakowa, zatem rozwiązaniem powyższego równania jest transformata Fouriera

$$x(t) \Leftrightarrow X(\omega) = C e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

gdzie C jest nieznaną stałą całkowania. Z właściwości (2.16) oraz równości (ii) wyliczamy

$$C = X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Ostatecznie otrzymujemy poszukiwaną parę transformat

$$e^{-\alpha t^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

Analizując wyniki zadania stwierdzamy, że transformata Fouriera impulsu Gaussa zachowuje kształt impulsu. Zwracamy uwagę, że podobną właściwością charakteryzują się grzebień Diraca (patrz tabela transformat Fouriera) oraz wielomiany Hermite'a (patrz zadanie 6).

Alternatywny sposób wyznaczenia transformaty Fouriera impulsu Gaussa został podany w zadaniu 2. ■

4. Udowodnić tożsamość

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha \tau}{\tau} \frac{\sin(t-\tau)}{t-\tau} d\tau = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & |\alpha| \geq 1 \\ \frac{\sin \alpha t}{t}, & |\alpha| \leq 1 \end{cases}$$

Powyższa całka może być przedstawiona w postaci spłotu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha \tau}{\tau} \frac{\sin(t-\tau)}{t-\tau} d\tau &= \frac{\alpha}{\pi} \text{Sa}(\alpha t) * \text{Sa}(t) \Leftrightarrow \pi \Pi_{2\alpha}(\omega) \Pi_2(\omega) = \\ &= \begin{cases} \pi \Pi_2(\omega), & |\alpha| > 1 \\ \pi \Pi_{2\alpha}(\omega), & |\alpha| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & |\alpha| \geq 1 \\ \frac{\sin \alpha t}{t}, & |\alpha| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Dowodzona tożsamość jest szczególnym przypadkiem bardziej ogólnej tożsamości $x(t) * \frac{\sin \alpha t}{\pi t} = x(t)$ ważnej, gdy transformata $x(t) \Leftrightarrow X(\omega) = 0$ dla $|\omega| > \Omega$ oraz gdy $\alpha > \Omega$. ■

5. Korzystając z twierdzenia Rayleigha (2.21) udowodnić, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

$a, b > 0$

Korzystając z pary transformat $\frac{1}{t^2 + \alpha^2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{\alpha} e^{-\alpha|\omega|}$, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\omega|} e^{-b|\omega|} d\omega = \frac{\pi}{ab} \int_0^{\infty} e^{-(a+b)\omega} d\omega$$

Obliczenie ostatniej całki niewłaściwej kończy zadanie. ■

6. Wykazać, że jeżeli sygnał $x(t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - t^2 x(t) = \lambda x(t) \quad (i)$$

to transformata Fouriera sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ jest również rozwiązaniem tego równania. ●

Korzystając z właściwości (2.17) oraz (2.19), obliczamy transformatę obydwóch stron zadanego równania różniczkowego

$$(j\omega)^2 X(\omega) + \frac{d^2 X(\omega)}{d\omega^2} = \lambda X(\omega)$$

$$\frac{d^2 X(\omega)}{d\omega^2} - \omega^2 X(\omega) = \lambda X(\omega)$$

Otrzymane równanie jest równoważne równaniu wyjściowemu, co dowodzi tezy zadania. Można również stwierdzić, że skoro zarówno sygnał $x(t)$ jak i jego transformata Fouriera $X(\omega)$ są rozwiązaniami tego samego równania różniczkowego (i), to i sygnał $x(t)$, i jego transformata $X(\omega)$ mają taką samą postać funkcyjną. Rozwiązaniem równania (i) dla całkowitych liczb nieparzystych $\lambda = 2n + 1$ są tzw. wielomiany Hermite'a.

Zwracamy uwagę, że podobną właściwością charakteryzują się grzebienie Diraca (patrz tabela transformat Fouriera) oraz impuls Gaussa (porównaj zadanie 2 oraz zadanie 3). ■

7. Udowodnij tożsamość

$$\lim_{W \rightarrow \infty} \frac{\sin Wt}{\pi t} = \delta(t)$$

Powyższą tożsamość można łatwo udowodnić w dziedzinie częstotliwości, gdyż $\frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wt) \Leftrightarrow \Pi_{2W}(\omega)$. Wyznaczamy transformatę Fouriera lewej strony dowodzonej tożsamości wykorzystując przemienność obliczenia granicy i transformaty

$$\lim_{W \rightarrow \infty} F\left\{\frac{\sin Wt}{\pi t}\right\} = \frac{W}{\pi} \lim_{W \rightarrow \infty} F\{\text{Sa}(Wt)\} = \lim_{W \rightarrow \infty} \Pi_{2W}(\omega) = 1$$

Z uwagi na $\delta(t) \Leftrightarrow 1$ możemy uznać dowód za zakończony. W podobny sposób można pokazać, że $\lim_{W \rightarrow \infty} \frac{W}{\pi} \text{Sa}^2(Wt) = \delta(t)$. ■

8. Wyznacz transformatę Fouriera sygnału $x(t) = \cos[\mathcal{A}(t)\omega_0 t]$ modelującego włączenie generatora drgania harmonicznego. ●

Zauważmy przede wszystkim, że spełniony jest związek

$$x(t) = \cos[\mathcal{A}(t)\omega_0 t] = \mathcal{A}(t)\cos\omega_0 t$$

pozwalający wyznaczyć poszukiwaną transformatę jako splot w dziedzinie częstotliwości

$$x(t) = \mathcal{A}(t)\cos\omega_0 t \Leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{2} \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] * [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$X(\omega) = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] - j \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

W widmie sygnału $x(t) = \cos[\mathcal{A}(t)\omega_0 t] = \mathcal{A}(t)\cos\omega_0 t$ obserwujemy nie tylko dyskretny prążek o częstotliwości ω_0 , ale również ciągłe składowe

widmowe w całym zakresie częstotliwości. Celem zadania jest uzmysłowić Czytelnikowi fakt, że częstotliwość "obserwowana" niekoniecznie pokrywa się z częstotliwością "fourierowską". ■

2.2. Twierdzenia i tożsamości

9. Korzystając z właściwości przekształcenia Fouriera, udowodnić związki

$$x(t-a) * y(t-b) = v(t-a-b)$$

$$\left[x(t) e^{j\omega_0 t} \right] * \left[y(t) e^{j\omega_0 t} \right] = v(t) e^{j\omega_0 t}$$

W obydwóch przypadkach $v(t) = x(t) * y(t)$. ●

W dowodzie korzystamy z właściwości (2.13) oraz (2.10) i (2.11). ■

10. Udowodnić twierdzenie o splocie w dziedzinie częstotliwości

$$x(t) y(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

Przekształcamy prawą stronę powyższego twierdzenia korzystając z definicji spłotu oraz zamieniając kolejność całkowania

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) &\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} X(v) Y(\omega-v) dv \right] e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} X(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega-v) e^{j\omega t} d\omega \right] dv = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(v) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(s) e^{j(s+v)t} ds \right] dv = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(v) e^{jvt} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(s) e^{js t} ds \right] dv = \\ &= y(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(v) e^{jvt} dv = x(t) y(t) \end{aligned}$$

11. Sygnał $x(t)$ jest rzeczywisty. Przyjmując, że $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ oraz

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = x_1(t) + jx_2(t)$$

udowodnić, że

$$x_1(t) = x(t)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Zauważmy najpierw, że $F\{x_1(t) + jx_2(t)\} = 2X(\omega) \mathcal{U}(\omega)$. Z tabeli transformacji i właściwości (2.8) wynika, że

$$\delta(t) + \frac{j}{\pi t} \Leftrightarrow 2\mathcal{U}(\omega)$$

W dalszym ciągu mamy

$$x_1(t) + jx_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\delta(t-\tau) + \frac{j}{\pi(t-\tau)} \right] d\tau = x(t) + j \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Porównanie części rzeczywistej i urojonej powyższej tożsamości kończy dowód. ■

12. Rozważmy dwa sygnały $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ oraz $y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$. Niech S_x oznacza "pole" pod wykresem funkcji $x(t)$, tzn. $S_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$. Udowodnij związek $S_{x*y} = S_x S_y$. ●

Z właściwości (2.16) wiemy, że $S_x = X(0)$ oraz $S_y = Y(0)$. Podobnie

$$S_{x*y} = F\{x(t) * y(t)\}_{\omega=0} = [X(\omega)Y(\omega)]_{\omega=0}$$

Ostatecznie stwierdzamy, że $S_{x*y} = S_x S_y$. ■

13. Sygnał $x(t) = \text{Sa} \frac{\pi t}{T}$ jest najprostszym przykładem sygnału o regularnie, z odstępem T , rozmieszczonych miejscach zerowych – z wyjątkiem chwili $t = 0$

$$x(kT) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t = kT \end{cases}$$

Udowodnić, że powyższy warunek jest spełniony, gdy widmo sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ posiada symetrię “dopełniającą”

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k 2W) = T$$

gdzie $\frac{n}{T} = W$. Sygnały posiadające cechę regularnego rozmieszczenia miejsc zerowych pozwalają zrealizować transmisję danych cyfrowych z zachowaniem tzw. zerowej interferencji międzysymbolowej (*intersymbol interference*). Całą klasę sygnałów o powyższej właściwości generuje transformata “podniesiony cosinus” o wykresie pokazanym na rysunku 2.1

$$X(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < (1-\alpha)W \\ \frac{T}{2} \left[1 - \sin \left(\frac{\pi}{2\alpha W} (|\omega| - W) \right) \right], & (1-\alpha)W < |\omega| < (1+\alpha)W \\ 0, & |\omega| < (1+\alpha)W \end{cases} \quad (i)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Wyznaczyć przebieg czasowy impulsu o widmie “podniesiony cosinus” i porównać go z przebiegiem $\text{Sa} \frac{\pi t}{T}$.

Warunek regularnego rozmieszczenia miejsc zerowych sygnału (z wyjątkiem chwili $t = 0$) można zapisać za pomocą zależności

$$x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = x(t) \delta_T(t) = \delta(t)$$

przyjmującej w dziedzinie częstotliwości postać

$$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right) = 1$$

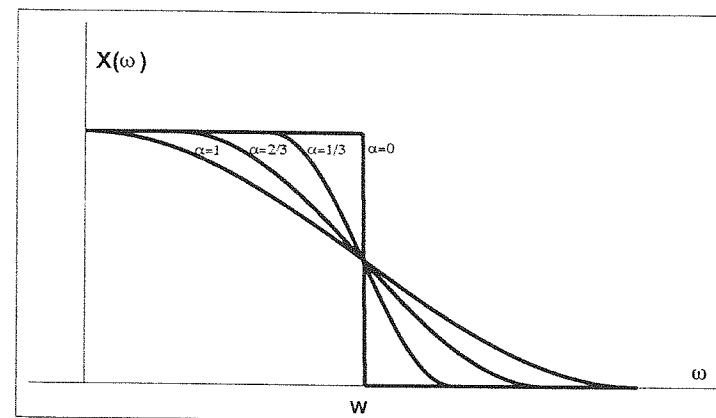
Po przekształcenich otrzymujemy warunek symetrii “dopełniającej”

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k 2W) = T$$

Wiemy, że zera sygnału $x(t) = \text{Sa} \frac{\pi t}{T}$ są rozmieszczone regularnie.

Zauważmy ponadto, że $\text{Sa} \frac{\pi t}{T} \Leftrightarrow T \Pi_{2W}(\omega)$, a więc spełniony jest także warunek symetrii “dopełniającej”

$$T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi_{2W}(\omega - k 2W) = T$$



Rys.2.1. Wykres widma “podniesiony cosinus”

Widmo (i) można przedstawić jako sumę trzech składników

$$X(\omega) = X_-(\omega) + X_0(\omega) + X_+(\omega)$$

przy czym

$$X_-(\omega) = \frac{T}{2} \left[1 + \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha W}(\omega + W)\right) \right] \Pi_{2\alpha W}(\omega + W)$$

$$X_-(\omega) = \frac{T}{2} \left(1 + \sin\frac{\pi \omega}{2\alpha W} \right) \Pi_{2\alpha W} * \delta(\omega + W)$$

$$X_0(\omega) = T \Pi_{2(1-\alpha)W}(\omega)$$

$$X_+(\omega) = \frac{T}{2} \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha W}(\omega - W)\right) \right] \Pi_{2\alpha W}(\omega - W)$$

$$X_+(\omega) = \frac{T}{2} \left(1 - \sin\frac{\pi \omega}{2\alpha W} \right) \Pi_{2\alpha W} * \delta(\omega - W)$$

Posługując się tabelą transformat Fouriera wyznaczamy sygnał odpowiadający transformacie $X_0(\omega)$

$$X_0(\omega) = T \Pi_{2(1-\alpha)W}(\omega) \Leftrightarrow (1-\alpha)\text{Sa}(1-\alpha)Wt$$

W podobny sposób postępujemy dla sumy transformat $X_-(\omega) + X_+(\omega)$

$$\begin{aligned} X_-(\omega) + X_+(\omega) &= \frac{T}{2} \Pi_{2\alpha W}(\omega) * [\delta(\omega + W) + \delta(\omega - W)] + \\ &+ \frac{T}{2} \sin\frac{\pi \omega}{2\alpha W} \Pi_{2\alpha W}(\omega) * [\delta(\omega + W) + \delta(\omega - W)] \end{aligned}$$

W dalszym ciągu

$$\frac{T}{2} \Pi_{2\alpha W}(\omega) * [\delta(\omega + W) + \delta(\omega - W)] \Leftrightarrow \alpha \cos Wt \text{Sa}(Wt)$$

oraz także

$$\frac{T}{2} \sin\frac{\pi \omega}{2\alpha W} \Pi_{2\alpha W}(\omega) * [\delta(\omega + W) - \delta(\omega - W)] =$$

$$\frac{T}{2} \frac{1}{2j} \left(e^{j\frac{\pi}{2\alpha W}} - e^{-j\frac{\pi}{2\alpha W}} \right) \Pi_{2\alpha W}(\omega) * [\delta(\omega + W) - \delta(\omega - W)] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\alpha}{2} \sin Wt \text{Sa} \alpha W \left(t + \frac{\pi}{2\alpha W} \right) + \frac{\alpha}{2} \sin Wt \text{Sa} \alpha W \left(t - \frac{\pi}{2\alpha W} \right) =$$

$$= -\frac{\alpha}{2} \sin Wt \frac{\cos \alpha W t}{\alpha W \left(t + \frac{\pi}{2\alpha W} \right)} - \frac{\alpha}{2} \sin Wt \frac{\cos \alpha W t}{\alpha W \left(t - \frac{\pi}{2\alpha W} \right)}$$

Przebieg czasowy impulsu o widmie "podniesiony cosinus" można wobec tego opisać zależnością

$$x(t) = (1-\alpha) \text{Sa}(1-\alpha)Wt + \alpha \cos Wt \text{Sa}(Wt) +$$

$$- \frac{\alpha}{2} \left[\frac{\cos \alpha W t}{\frac{\pi}{2} + \alpha W t} - \frac{\cos \alpha W t}{\frac{\pi}{2} - \alpha W t} \right] \sin W t$$

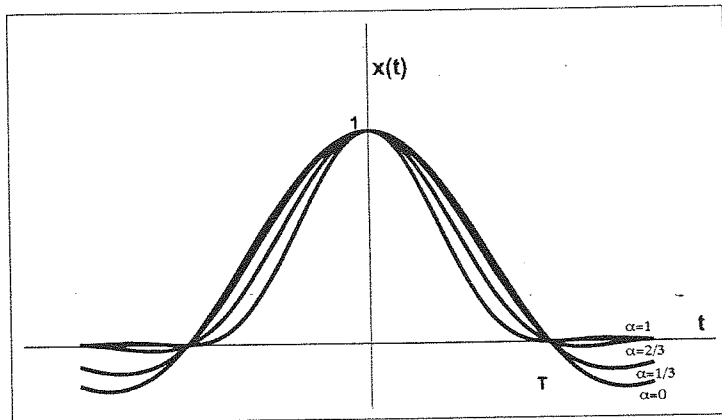
$$x(t) = \frac{\sin W t \cos W t}{W t} - \sin W t \cos \alpha W t \left[\frac{\alpha}{\pi + 2\alpha W t} - \frac{\alpha}{\pi - 2\alpha W t} \right]$$

Ostatecznie, przebieg czasowy impulsu o widmie "podniesiony cosinus" wyraża się następującą zależnością

$$x(t) = \text{Sa}(Wt) \frac{\cos \alpha W t}{1 - \left(\frac{2\alpha W}{\pi} t \right)^2}$$

Analizując strukturę przebiegu czasowego impulsu o widmie "podniesiony cosinus" stwierdzamy, że pożądane rozmieszczenie miejsc zerowych zapewnia czynnik $\text{Sa}(Wt)$. Drugi czynnik jest przede wszystkim odpowiedzialny za szybsze zanikanie badanego impulsu w porównaniu z zanikaniem impulsu

$\text{Sa}(Wt)$; impuls $\text{Sa}(Wt)$ zanika proporcjonalnie do t^{-1} , zaś badany impuls proporcjonalnie do t^{-3} . Fakt ten ma również istotne znaczenie dla możliwości eliminacji interferencji międzysymbolowej.



Rys.2.2. Przebieg impulsu o widmie "podniesiony cosinus"

Pozostaje nam jeszcze wyjaśnić, dlaczego transformata Fouriera rozważanego przez nas impulsu została nazwana "podniesiony cosinus". Dla wartości współczynnika $\alpha = 1$ transformata Fouriera (i) impulsu przyjmuje charakterystyczną postać

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 + \cos \frac{\pi\omega}{2W}, & |\omega| \leq 2W \\ 0, & |\omega| \geq 2W \end{cases}$$

wyjaśniającą pochodzenie nazwy transformaty.

Zauważmy, że szerokość widma impulsu $\text{Sa}(Wt)$ wynosi W , podczas gdy szerokość widma impulsu o transformacie "podniesiony cosinus" jest równa $W \leq (1 + \alpha)W \leq 2W$. Z tego powodu współczynnik α jest nazywany współczynnikiem rozmycia (*roll-off factor*). Poszerzenie widma impulsu w transformacie "podniesiony cosinus" jest niewątpliwie jego wadą, ale z kolei widmo tego impulsu zanika łagodnie, co - w przeciwieństwie do impulsu $\text{Sa}(Wt)$ - pozwala na fizyczną relizację impulsu o transformacie "podniesiony cosinus". ■

14. Poniżej zestawiamy transformaty Fouriera trzech rodzajów impulsów o skończonym czasie trwania $2T$ szacując jednocześnie - w dosyć prosty sposób - szybkość zanikania składowych częstotliwościowych wraz ze wzrostem częstotliwości ω

- impuls prostokątny

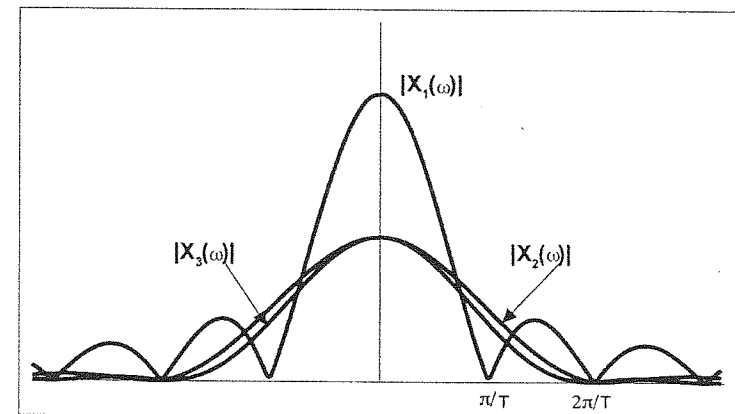
$$\Pi_{2T}(t) \Leftrightarrow X_1(\omega) = T \text{Sa}(\omega T) = \frac{2 \sin \omega T}{\omega}$$

$$|X_1(\omega)| = \left| \frac{2 \sin \omega T}{\omega} \right| \propto |\omega|^{-1}$$

- impuls trójkątny

$$\Lambda_{2T}(t) \Leftrightarrow X_2(\omega) = T \text{Sa}^2 \frac{\omega T}{2} = \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T}$$

$$|X_2(\omega)| = \left| \frac{4 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2 T} \right| \propto |\omega|^{-2}$$



Rys.2.3. Transformata Fouriera impulsu prostokątnego, impulsu trójkątnego oraz impulsu "podniesiony cosinus"

– impuls “podniesiony cosinus”

$$\frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi}{T} t) \Pi_{2T}(t) \Leftrightarrow X_3(\omega) = \frac{\pi^2 \sin \omega T}{\omega(\pi^2 - \omega^2 T^2)}$$

$$|X_3(\omega)| = \left| \frac{\pi^2 \sin \omega T}{\omega(\pi^2 - \omega^2 T^2)} \right| \propto |\omega|^{-3}$$

W transmisji danych dla możliwie pełnej eliminacji zjawiska interferencji międzysymbolowej (*intersymbol interference*) pożądanym jest, aby widmo przekazywanych impulsów jak najszybciej zanikało wraz ze wzrostem częstotliwości. Widmo impulsu prostokątnego zanika proporcjonalnie do $|\omega|^{-1}$, impulsu trójkątnego - proporcjonalnie do $|\omega|^{-2}$, zaś impulsu “podniesiony cosinus” - proporcjonalnie do $|\omega|^{-3}$

Blizsza analiza zachowania impulsów w chwilach $t = \pm T$ pozwala wykryć ogólną prawidłowość. Zauważmy bowiem, że impuls prostokątny w chwilach $t = \pm T$ jest nieciągły, impuls trójkątny jest ciągły, ale nieciągła jest już jego pierwsza pochodna, nieciągłość w impulsie “podniesiony cosinus” pojawia się dopiero z drugą jego pochodną (nieciągłość można w rozważanym przypadku traktować jako niezerowanie się pochodnych w chwilach $t = \pm T$).

Wykazać, że jeżeli dla impulsu $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ określonego dla $t \in [-T, T]$ spełnione są warunki

$$x^{(k)}(-T) = x^{(k)}(T) = 0 \quad (i)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

to transformata Fouriera $X(\omega)$ impulsu $x(t)$ zanika do zera co najmniej tak szybko jak funkcja $|\omega|^{-(n+1)}$ przy $|\omega| \rightarrow \infty$ ²⁾

$$X(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^{n+1}}\right) \quad (ii)$$

$$|\omega| \rightarrow \infty$$

2) Symbol $X(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^{n+1}}\right)$ należy rozumieć w ten sposób, że $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{n+1} X(\omega) = 0$.

W dowodzie należy n -krotnie wykonać całkowanie przez części w całce przekształcenia Fouriera

$$X(\omega) = \int_{-T}^T x(t) e^{j\omega t} dt$$

a następnie wykorzystać twierdzenie o granicznym zachowaniu się transformaty Fouriera

$$X(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (iii)$$

$$|\omega| \rightarrow \infty$$

Pierwsze całkowanie przez części całce przekształcenia Fouriera daje

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-T}^T x(t) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \int_{-T}^T x(t) d e^{j\omega t} = \\ &= \frac{1}{j\omega} [x(-T)e^{j\omega(-T)} - x(T)e^{-j\omega T}] - \frac{1}{j\omega} \int_{-T}^T x^{(1)}(t) e^{j\omega t} dt \end{aligned}$$

Powtarzając tę operację, otrzymujemy

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{j\omega} [x(-T)e^{j\omega T} - x(T)e^{-j\omega T}] + \dots + \\ &+ \frac{1}{(j\omega)^n} [x^{(n-1)}(-T)e^{j\omega T} - x^{(n-1)}(T)e^{-j\omega T}] + \frac{1}{(j\omega)^n} \int_{-T}^T x^{(n)}(t) e^{j\omega t} dt \end{aligned}$$

Z uwagi na przyjęte założenia (i) powyższy rozkład rzeczywiście upraszcza się

$$X(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^n} \int_{-T}^T x^{(n)}(t) e^{j\omega t} dt$$

Biorąc pod uwagę właściwość (iii) stwierdzamy, że transformata Fouriera impulsu zanika do zera co najmniej tak szybko jak funkcja $|\omega|^{n+1}$, przy $|\omega| \rightarrow \infty$

$$X(\omega) = O\left(\frac{1}{\omega^{n+1}}\right) \\ |\omega| \rightarrow \infty$$

Poniżej podajemy jeden z możliwych sposobów konstruowania impulsów o skończonym czasie trwania, dla których możemy elastycznie kształtować szybkość zanikania ich widma wraz ze wzrostem częstotliwości $|\omega| \rightarrow \infty$. Impulsy te opisuje ogólny wzór

$$x(t) = \begin{cases} \cos \theta(t), & |t| \leq T \\ 0, & |t| \geq T \end{cases} \\ \theta(t) = \frac{\pi t}{2T} - \sum_{k=1}^n A_k \sin\left(k \frac{2\pi t}{T}\right)$$

Współczynniki $A_k, k = 1, 2, \dots, n$ dobiera się tak, aby pierwsze n pochodnych impulsu $x(t)$ było ciągłe w chwilach $\pm T$. W transmisji sygnałów cyfrowych znalazły zastosowanie następujące impulsy:

– szybkość zanikania widma $\propto |\omega|^{-2}$ (*Minimum Shift Keying* - MSK)

$$\theta(t) = \frac{\pi t}{2T}$$

– szybkość zanikania widma $\propto |\omega|^{-3}$ (*Sinusoidal Frequency Shift Keying* - SFSK)

$$\theta(t) = \frac{\pi t}{2T} - \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi t}{T}$$

– szybkość zanikania widma $\propto |\omega|^{-6}$ (*Double Sinusoidal Frequency Shift Keying* - DSFSK)

$$\theta(t) = \frac{\pi t}{2T} - \frac{1}{3} \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{24} \sin \frac{4\pi t}{T}$$

Jeszcze innym przykładem impulsu, dla którego możemy kształtować szybkość zanikania jego widma, jest impuls

$$x(t) = \left(\frac{1-t^2}{T^2}\right)^n \Pi_{2T}(t)$$

Widmo tego impulsu zanika proporcjonalnie do $|\omega|^{n+1}$ przy $|\omega| \rightarrow \infty$.

Należy pamiętać, że im szybciej zanika widmo impulsu ze wzrostem częstotliwości, tym szersza staje się wstęga główna jego widma. ■

15. Udowodnić, że jeżeli $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, to $\frac{dx}{dt} * \frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow j\omega X(\omega)$. ●

Korzystając z właściwości (2.8) oraz pary transformat $\text{sgnt} \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$ znajdujemy, że $\frac{1}{j\omega} \Leftrightarrow \text{sgnt}$. Otrzymujemy zatem

$$\frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow j\omega \frac{dx}{dt} * \frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow j\omega X(\omega) (-j \text{sgn}\omega) = j\omega X(\omega)$$

16. Każdy sygnał można przedstawić jako złożenie sygnału parzystego i nieparzystego (*even* - parzysty, *odd* - nieparzysty)

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

Udowodnić, że dla sygnału rzeczywistego $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ są spełnione związki

$$x_e(t) \Leftrightarrow \Re_e [X(\omega)]$$

$$x_o(t) \Leftrightarrow j \Im_m [X(\omega)]$$

Znajdujemy transformatę Fouriera sygnału $x(-t)$

$$F\{x(-t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* = X^*(\omega)$$

$$x(-t) \Leftrightarrow X^*(\omega)$$

W dalszym ciągu otrzymujemy

$$F\{x_e(t)\} = \frac{1}{2} [X(\omega) + X^*(\omega)] = \Re_e [X(\omega)]$$

$$F\{x_o(t)\} = \frac{1}{2} [X(\omega) - X^*(\omega)] = j \Re_e [X(\omega)]$$

17. Przez sygnał przyczynowy $h(t)$ rozumiemy sygnał, dla którego $h(t) = 0$ dla $t < 0$. Zakładamy, że $h(t) \Leftrightarrow H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$. Wykazać słuszność związków

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y} dy$$

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y} dy$$

Rozwiązując zadanie, należy skorzystać z faktu, że każdy sygnał można rozbić na składową parzystą $h_e(t)$ oraz nieparzystą $h_o(t)$. Przykład takiego rozkładu jest podany na rysunku 2.4.

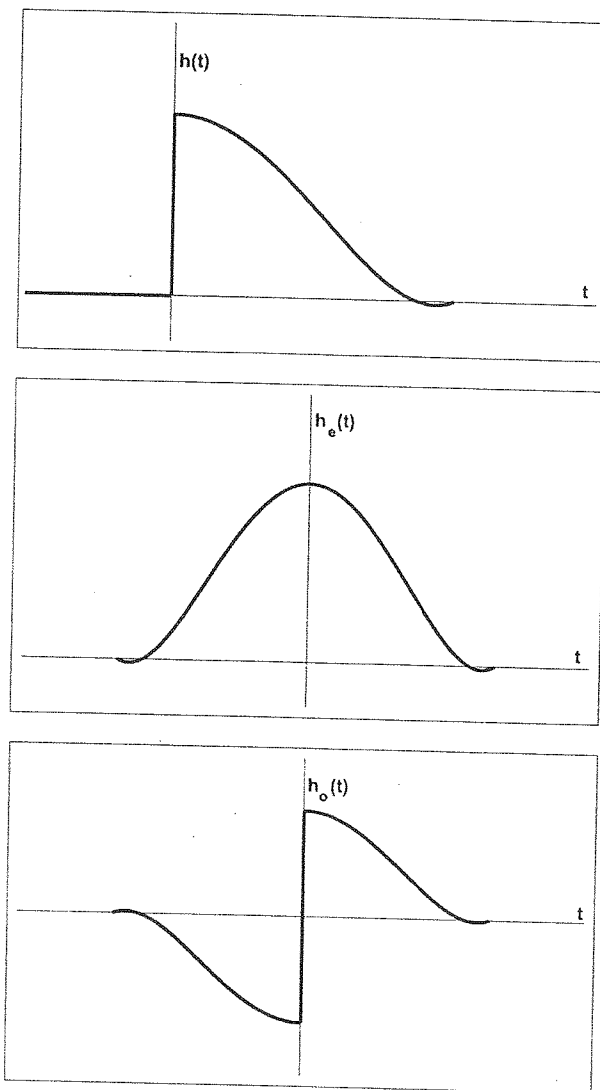
$$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$$

$$h_e(t) = \frac{1}{2} [h(t) + h(-t)]$$

$$h_o(t) = \frac{1}{2} [h(t) - h(-t)]$$

Korzystając z rozbitcia sygnału $h(t)$ na składową parzystą i nieparzystą obliczamy jego transformatę Fouriera $H(\omega)$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [h_e(t) + h_o(t)] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_o(t) e^{-j\omega t} dt$$



Rys. 2.4. Rozkład przyczynowego sygnału $h(t)$ na składową parzystą $h_e(t)$ oraz składową nieparzystą $h_o(t)$

Sygnał $h_e(t)$ jest parzysty, sygnał $h_o(t)$ jest nieparzysty, a więc

$$H(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h_e(t) \cos \omega t dt}_{R(\omega)} + j \underbrace{\left[-\int_{-\infty}^{\infty} h_o(t) \sin \omega t dt \right]}_{X(\omega)}$$

Z ostatniej zależności wynika, że

$$h_e(t) \Leftrightarrow R(\omega)$$

$$h_o(t) \Leftrightarrow jX(\omega)$$

Miedzy składowymi $h_o(t)$ oraz $h_e(t)$ zachodzą związki $h_e(t) = h_o(t)$ dla $t > 0$ oraz $h_o(t) = -h_e(t)$ dla $t < 0$, które możemy zapisać w postaci

$$h_e(t) = h_o(t) \operatorname{sgn}(t) \quad (ii)$$

$$h_o(t) = h_e(t) \operatorname{sgn}(t)$$

Korzystając z par transformat (i), wyznaczamy transformaty Fouriera obu stron pierwszego ze związków (ii)

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} jX(\omega) * F\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{1}{2\pi} jX(\omega) * \frac{2}{j\omega} = \frac{1}{\pi} X(\omega) * \frac{1}{\omega}$$

Rozpisując operację splotu otrzymujemy związek

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y} dy$$

Korzystając z par transformat (i) wyznaczamy transformaty Fouriera obu stron drugiego ze związków (ii)

$$jX(\omega) = \frac{1}{2\pi} R(\omega) * F\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{1}{2\pi} R(\omega) * \frac{2}{j\omega} = \frac{1}{\pi} R(\omega) * \frac{1}{j\omega}$$

Rozpisując operację splotu otrzymujemy drugi z dowodzonych związków

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y} dy$$

Otrzymane zależności dowodzą, że znając część rzeczywistą transformaty Fouriera sygnału przyczynowego można wyznaczyć jej część urojoną. ■

18. Udowodnić, że zbiór sygnałów $\{\operatorname{SaW}(t - kT): k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ jest ortogonalny w przedziale czasu $(-\infty, \infty)$, przy czym $W = \frac{\pi}{T}$. Wyznaczyć rozkład sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ w szereg względem funkcji tego układu przy założeniu, że widmo $X(\omega)$ sygnału $x(t)$ ma skończone pasmo $|\omega| \leq W$. ●

Zgodnie z (1.5) funkcje układu $\{\operatorname{SaW}(t - kT): k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ $W = \frac{\pi}{T}$, będą spełniać warunek ortogonalności w przedziale czasu $(-\infty, \infty)$, jeżeli

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{SaW}(t - kT) \operatorname{SaW}(t - nT) dt \begin{cases} = 0, & k \neq n \\ \neq 0, & k = n \end{cases}$$

Powyższy warunek nietrudno jest sprawdzić, jeżeli wykorzysta się w tym celu twierdzenie Rayleigha (2.21). Z tabeli transformat Fouriera oraz z właściwości (2.10) wnioskujemy, że

$$\operatorname{SaW}(t - kT) \Leftrightarrow \frac{\pi}{\omega} \Pi_{2W}(\omega) e^{-jkT\omega}$$

$$\operatorname{SaW}(t - nT) \Leftrightarrow \frac{\pi}{\omega} \Pi_{2W}(\omega) e^{-jnT\omega}$$

Zgodnie z twierdzeniem Rayleigha (2.21)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{SaW}(t - kT) \operatorname{SaW}(t - nT) dt = \frac{\pi}{2W^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{2W}(\omega) e^{-jkT\omega} e^{jnT\omega} d\omega =$$

$$\frac{\pi}{2W^2} \int_{-W}^W e^{j(n-k)T\omega} d\omega = \frac{\pi}{2W^2} \frac{e^{j(n-k)T\omega}}{j(n-k)T} \Big|_{-W}^W = T \operatorname{Sa}(n-k)\pi = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Po sprawdzeniu warunku ortogonalności układu funkcji $\{\operatorname{SaW}(t - kT):$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $W = \frac{\pi}{T}$ przechodzimy do obliczenia współczynników c_k rozwinięcia sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ w szereg tych funkcji. W obliczeniach ponownie korzystamy z twierdzenia Rayleigha (2.21). Zgodnie ze wzorem (1.8) mamy

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \text{Sa}W(t - kT) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \Pi_{2W}(\omega) e^{jkT\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{jkT\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Big|_{t=kT} = x(kT) \end{aligned}$$

Rozkład sygnału $x(t)$ o widmie $X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| \leq W$ względem funkcji ortogonalnego układu $\{\text{Sa}W(t - kT): k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $W = \frac{\pi}{T}$ przyjmuje ostatecznie postać

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \text{Sa}W(t - kT)$$

stanowiącą treść twierdzenia o próbkowaniu Kotielnikowa-Shannona (współczynniki rozkładu sygnału $x(t)$ są równe wprost wartościom jego próbek pobieranych w chwilach kT , $T = \frac{\pi}{W}$. ■

2.3. Parametry sygnałów

19. Całka $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t) dt$ definiuje moment n -tego rzędu sygnału

$x(t) \Leftrightarrow X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$. Udowodnić związek

$$\begin{aligned} (-j)^n m_n &= \frac{d^n X(0)}{d\omega^n} \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Korzystamy z rozwinięcia funkcji $e^{j\omega t}$ w szereg

$$e^{j\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^n}{n!}$$

Uwzględniając powyższy szereg we wzorze całkowym Fouriera, otrzymujemy

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j\omega t)^n}{n!} \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[x(t) \frac{(-j\omega t)^n}{n!} \right] dt$$

Ostatecznie

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n m_n \frac{\omega^n}{n!} \quad (i)$$

Z kolei rozwijamy w szereg Maclaurina transformatę $X(\omega)$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n X(0)}{d\omega^n} \frac{\omega^n}{n!} \quad (ii)$$

Porównując rozwinięcia (i) oraz (ii) wyraz po wyrazie, dowodzimy tezy zadania. ■

17. Rozważmy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$. Dla ułatwienia dalszych rozważań zakładamy, że $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 1$

Przez odciętą środka ciężkości sygnału $x(t)$ rozumiemy wielkość $\eta = m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) dt$. Parametr η może być interpretowany jako punkt osi czasu, wokół którego sygnał jest skupiony. Udowodnić, że $\eta = -\frac{d\varphi(0)}{d\omega}$.

Przez wariancję sygnału $x(t)$ rozumiemy wielkość $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \eta)^2 x(t) dt$

charakteryzującą rozproszenie sygnału wokół odciętej jego środka ciężkości.

Udowodnić, że $\sigma^2 = -\frac{d^2 A(0)}{d\omega^2}$. ●

Obliczamy pochodne $\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ oraz $\frac{d^2 X(\omega)}{d\omega^2}$ korzystając z wykładniczej reprezentacji transformaty $X(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \frac{dA(\omega)}{d\omega} e^{j\varphi(\omega)} + A(\omega) j \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X(\omega)}{d\omega^2} &= \frac{d^2 A(\omega)}{d\omega^2} e^{j\varphi(\omega)} + \frac{dA(\omega)}{d\omega} j \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} e^{j\varphi(\omega)} + \frac{dA(\omega)}{d\omega} j \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} e^{j\varphi(\omega)} + \\ &+ A(\omega) j \frac{d^2 \varphi(\omega)}{d\omega^2} e^{j\varphi(\omega)} - A(\omega) \left[\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \right]^2 e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

Należy teraz obliczyć powyższe pochodne dla $\omega = 0$ - potrzebujemy zatem znać wartości widma amplitudowego $A(\omega)$ i widma fazowego $\varphi(\omega)$ oraz ich pochodnych dla $\omega = 0$.

Widmo amplitudowe $A(\omega)$ jest funkcją parzystą, a zatem $\frac{dA(0)}{d\omega} = 0$,

widmo fazowe $\varphi(\omega)$ jest funkcją nieparzystą, więc $\varphi(0) = \frac{d^2 \varphi(0)}{d\omega^2} = 0$.³⁾

Z uwagi na założenie $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 1$ mamy także $A(0) = X(0) = 1$. Uwzględniając te zależności oraz twierdzenie (2.22), dostajemy

$$\frac{dX(0)}{d\omega} = j \frac{d\varphi(0)}{d\omega} = -j \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) dt$$

a więc

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) dt = -\frac{d\varphi(0)}{d\omega}$$

3) Zależności te można łatwo stwierdzić, rozwijając funkcje $\varphi(\omega)$ oraz $A(\omega)$ w szereg Taylora wokół punktu $\omega = 0$.

oraz

$$\frac{d^2 X(0)}{d\omega^2} = \frac{d^2 A(0)}{d\omega^2} - \left[\frac{d\varphi(0)}{d\omega} \right]^2 = -\int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t) dt$$

Przekształcamy dalej ostatnią zależność

$$\frac{d^2 A(0)}{d\omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x(t) dt - \eta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \eta)^2 x(t) dt$$

Ostatecznie

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \eta)^2 x(t) dt = -\frac{d^2 A(0)}{d\omega^2}$$

Jeżeli sygnał $x(t)$ nie spełnia warunku $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 1$, należy rozpatrzyć sygnał znormalizowany $\frac{x(t)}{M}$, gdzie $M = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$. ■

18. Sygnały $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ oraz $y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$ są sygnałami dolnopasmowymi o szerokości pasma równej odpowiednio W_x oraz W_y . Udowodnić związek $W_{xy} = W_x + W_y$ (szerokość widma iloczynu sygnałów jest równa sumie szerokości widm sygnałów mnożonych). ●

Niech $z(t) = x(t)y(t)$. Wiemy, że

$$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) Y(\omega - \nu) d\nu$$

Z założeń zadania wiadomo, że $X(\nu) = 0$ dla $|\nu| > W_x$ oraz $Y(\omega - \nu) = 0$ dla $|\omega - \nu| > W_y$. Analiza tych nierówności pozwala wyznaczyć zakres częstotliwości $|\omega| < W_x + W_y$, w którym całka splotu jest niezerowa, co z kolei określa szerokość pasma iloczynu dwóch sygnałów. Z rozwiązania zadania wnioskujemy, że n -krotne potęgowanie sygnału powoduje n -krotne poszerzenie szerokości jego pasma. ■

19. Udowodnić, że zakres zmienności sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ oraz jego pochodnych jest ograniczony przez momenty M_n jego widma amplitudowego $|X(\omega)|$.

$$|x^{(n)}(t)| \leq M_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |\omega|^n |X(\omega)| d\omega$$

przy czym $x^{(0)}(t) = x(t)$. ●

Korzystając z właściwości (2.17) przekształcenia Fouriera oraz z definicji odwrotnego przekształcenia Fouriera (2.2), możemy napisać

$$|x^{(n)}(t)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (j\omega)^n X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |(j\omega)^n X(\omega) e^{j\omega t}| d\omega$$

Ponieważ $|e^{j\omega t}| = 1$, możemy uprościć ostatnią całkę, co kończy dowód. ■

20. Równoważny czas trwania sygnału D_t można określić jako wartość drugiego momentu dla $|x(t)|^2$

$$D_t^2 = \int_{-\infty}^\infty t^2 |x(t)|^2 dt$$

Udowodnić związek

$$D_t^2 = \int_{-\infty}^\infty t^2 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\left(\frac{dA}{d\omega} \right)^2 + A^2 \left(\frac{d\varphi}{d\omega} \right)^2 \right] d\omega \quad (i)$$

gdzie $A = A(\omega)$ jest widmem amplitudowym, a $\varphi = \varphi(\omega)$ - widmem fazowym sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$. ●

Obliczamy pochodną transformaty Fouriera sygnału $x(t)$, uwzględniając przy tym właściwość (2.19)

$$(-jt)x(t) \Leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \left(\frac{dA}{d\omega} + jA \frac{d\varphi}{d\omega} \right) e^{j\varphi(\omega)}$$

Korzystając z twierdzenia Parsevala (2.20) dla sygnału $(-jt)x(t)$ otrzymujemy związek

$$\int_{-\infty}^\infty t^2 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{dX}{d\omega} \right|^2 d\omega$$

Można sprawdzić, że

$$\left| \frac{dX}{d\omega} \right|^2 = \left(\frac{dA}{d\omega} \right)^2 + A^2 \left(\frac{d\varphi}{d\omega} \right)^2$$

co dowodzi słuszności związku (i).

Z zależności (i) wnioskujemy, że równoważny czas trwania sygnału jest tym dłuższy, im szybciej w funkcji częstotliwości zmieniają się charakterystyki częstotliwościowe sygnału. Możemy ponadto zauważyć, że jeżeli widmo amplitudowe $A = A(\omega)$ jest zadane, to najkrótszy równoważny czas trwania mają sygnały o zerowej charakterystyce fazowej $\varphi = \varphi(\omega) = 0$. ■

21. Równoważny czas trwania sygnału jest dany zależnością

$$D_t^2 = \int_{-\infty}^\infty t^2 |x(t)|^2 dt$$

Podobnie można zdefiniować szerokość widma sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$

$$D_\omega^2 = \int_{-\infty}^\infty \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^\infty \omega^2 A^2(\omega) d\omega$$

Zasada nieokreśloności stwierdza, że jeżeli sygnał $x(t)$ zanika wraz z upływem czasu szybciej aniżeli przebieg $\frac{1}{\sqrt{t}}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt{t} x(t) = 0$$

to

$$D_t D_\omega \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (i)$$

Udowodnić zasadę nieokreśloności (i), korzystając z nierówności Schwarz

$$\left| \int_a^b g_1 g_2 dt \right|^2 \leq \int_a^b |g_1|^2 dt \int_a^b |g_2|^2 dt \quad (\text{ii})$$

w której równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, kiedy sygnały są proporcjonalne $g_2(t) = k g_1(t)$. Nierówność Schwarza należy zastosować dla przebiegów

$g_1 = t x(t)$ oraz $g_2 = \frac{dx}{dt}$ w granicach $\pm \infty$ przy dodatkowym założeniu normalizującym

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega = 1$$

Nierówność Schwarza przy $g_1 = t x(t)$ oraz $g_2 = \frac{dx}{dt}$ przyjmuje postać

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t x \frac{dx}{dt} dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |t x|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dx}{dt} \right|^2 dt$$

Lewą stronę powyższej nierówności całkujemy przez części wykorzystując przy tym warunek normalizacyjny oraz założenie o szybkości zanikania dla sygnału $x(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t x \frac{dx}{dt} dt = t \frac{x^2}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 dt = -\frac{1}{2}$$

Z twierdzenia Parsewała (2.20) oraz właściwości (2.17) mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dx}{dt} \right|^2 dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega A(\omega) |A(\omega)|^2 d\omega$$

Po podstawieniu ostatnich dwóch zależności do nierówności Schwarza (ii) dostajemy związek

$$\frac{1}{4} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |t x|^2 dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega A(\omega) |A(\omega)|^2 d\omega$$

kończący dowód zasady nieokreśloności (i).

Zasada nieokreśloności jeszcze raz potwierdza obserwację, że im krótszy jest czas trwania sygnału, tym szersze jest jego widmo. ■

22. Dla sygnałów nieujemnych $x(t) \geq 0$ o liniowym widmie fazowym

$$x(t) \Leftrightarrow A(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

można określić równoważny czas trwania sygnału

$$D_t = \frac{1}{x_{\max}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$$

oraz analogicznie równoważną szerokość widma sygnału

$$D_\omega = \frac{1}{A_{\max}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega$$

Obydwie wielkości D_t oraz D_ω są szerokościami “zastępczych” prostokątów⁴. Udowodnić, że $D_t D_\omega = 2\pi$. ●

Wykażemy najpierw, że

$$x_{\max} = x(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega \quad (\text{i})$$

Ponieważ widmo amplitudowe $A(\omega)$ jest nieujemne, zatem na mocy właściwości (2.6) sygnał pomocniczy $g(t) \Leftrightarrow A(\omega)$ jest parzysty, $g(-t) = g(t)$. Z parzystości widma amplitudowego, $A(-\omega) = A(\omega)$, wnioskujemy z kolei, że

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) d\omega = g(0)$$

4) Szerokość D_t (D_ω) jest tak określona, że pole prostokąta “zastępczego” o wysokości $x_{\max}$ ($A_{\max}$) i szerokości D_t (D_ω) było równe polu pod sygnałem $x(t)$ (widmem $A(\omega)$), którego wartość maksymalna wynosi $x_{\max}$ ($A_{\max}$).

co oznacza, że sygnał pomocniczy $g(t)$ przyjmuje swą maksymalną wartość dla $t = 0$. Z właściwości (2.10) wynika, że pomiędzy sygnałem oryginalnym $x(t)$ a pomocniczym $g(t)$ zachodzi związek, $x(t) = g(t - t_0)$, a więc słuszny jest również związek (i).

W podobny sposób można pokazać, że $A_{\max} = A(0)$

$$A(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0) = A(0) = A_{\max} \quad (\text{ii})$$

Wyrażając iloczyn $D_t D_\omega$ poprzez związki (i) oraz (ii) stwierdzamy, że $D_t D_\omega = 2\pi$. ■

23. Sygnał $y(t)$ przyjmuje wartości nieujemne, $y(t) \geq 0$, dla $t \in [0, T]$, natomiast dla $t \notin [0, T]$ $x(t) \equiv 0$. Niech W oznacza tzw. 3-decybelową szerokość widma sygnału definiowaną jako

$$|Y(W)| = \frac{|Y(0)|}{\sqrt{2}}$$

Udowodnić związek $WT \geq \frac{\pi}{2}$. ●

Przede wszystkim należy udowodnić, że widmo amplitudowe sygnału $|Y(\omega)|$ osiąga maksimum dla $\omega = 0$, gdyż tylko wtedy definicja szerokości 3-decybelowej jest poprawna. Korzystając bezpośrednio z definicji przekształcenia Fouriera, otrzymujemy

$$Y(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} y(t) dt = Y(0) = |Y(0)|$$

Wyznaczamy następnie część rzeczywistą oraz urojoną transformaty Fouriera sygnału $y(t)$

$$R(\omega) = \int_0^T y(t) \cos \omega t$$

$$X(\omega) = -\int_0^T y(t) \sin \omega t$$

W dalszym ciągu będziemy korzystać z nierówności ⁵⁾

$$\cos \omega t + \sin \omega t \geq 1$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2T}$$

$$0 \leq t \leq T$$

Korzystając z powyższej nierówności szacujemy wartość wyrażenia

$$R(\omega) - X(\omega) = \int_0^T y(t) (\cos \omega t + \sin \omega t) dt \geq \int_0^T y(t) dt = |Y(0)| \quad (\text{i})$$

Dla dowolnych liczb α, β zachodzi nierówność

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{(\alpha - \beta)^2}{2}$$

W ostatniej nierówności podstawiamy $\alpha = R(\omega)$ oraz $\beta = X(\omega)$, a następnie korzystamy z oszacowania (i)

$$|Y(\omega)|^2 = R^2(\omega) + X^2(\omega) \geq \frac{[R(\omega) - X(\omega)]^2}{2} \geq \frac{|Y(0)|^2}{2}$$

Jeżeli $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2T}$ to $|Y(W)| \geq \frac{|Y(0)|}{\sqrt{2}}$, a zatem również

$$WT \geq \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

5) Ponieważ $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$, zatem w przedziale $0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2T}$ zachodzi nierówność $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) \geq 1$, a więc także $\cos \omega t + \sin \omega t \geq 1$.

2.4. Filtracja sygnałów

24. Sygnał $a \cos \omega_0 t$ jest sygnałem wejściowym filtru o transmitancji $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$. Wyznaczyć sygnał wyjściowy filtru. ●

Widmo sygnału wejściowego wynosi

$$a \cos \omega_0 t \Leftrightarrow a\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

Widmo sygnału wyjściowego równa się

$$Y(\omega) = H(\omega) a\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] = \\ a\pi |H(\omega_0)| e^{j\varphi(\omega_0)} \delta(\omega - \omega_0) + a\pi |H(-\omega_0)| e^{j\varphi(-\omega_0)} \delta(\omega + \omega_0)$$

Korzystając z właściwości symetrii widma amplitudowego oraz fazowego otrzymujemy dalej

$$Y(\omega) = a\pi |H(\omega_0)| e^{j\varphi(\omega_0)} \delta(\omega - \omega_0) + a\pi |H(\omega_0)| e^{-j\varphi(\omega_0)} \delta(\omega + \omega_0)$$

Przyjmijmy oznaczenie

$$A(\omega) = a\pi |H(\omega_0)| e^{j\varphi(\omega_0)} \delta(\omega - \omega_0) \Leftrightarrow \frac{a}{2} |H(\omega_0)| e^{j\varphi(\omega_0)} e^{j\omega_0 t}$$

Zauważmy teraz, że $Y(\omega) = A(\omega) + A^*(-\omega)$. Korzystając z właściwości (2.15) otrzymujemy

$$Y(\omega) \Leftrightarrow y(t) = 2\Re \{F^{-1}\{A(\omega)\}\} = a |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$$

Zależność ta tłumaczy, dlaczego funkcję $|H(\omega)|$ nazywamy charakterystyką amplitudową, a funkcję $\varphi(\omega)$ - charakterystyką fazową filtru o transmitancji $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$.

Zadanie można rozwiązać w prostszy sposób, korzystając z właściwości systemów liniowych. Zgodnie ze wzorem Eulera, sygnał wejściowy filtru $a \cos \omega_0 t$ przedstawiamy w postaci

$$a \cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

Wiadomo, że filtr o transmitancji $H(s)$ pobudzony sygnałem wejściowym e^{st} odpowiada sygnałem $H(s)e^{st}$. Wobec tego w naszym przypadku sygnał wyjściowy filtru wynosi

$$y(t) = \frac{a}{2} [H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} + H(-j\omega_0) e^{-j\omega_0 t}]$$

Korzystając z właściwości symetrii charakterystyki amplitudowej oraz fazowej filtru możemy napisać

$$y(t) = \frac{a}{2} |H(\omega_0)| [e^{j(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))}] \\ y(t) = a |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$$

25. Wyznaczyć i zbadać odpowiedź skokową $\mathcal{A}_W(t)$ idealnego filtru dolno-przepustowego o transmitancji $H(\omega) = \Pi_{2W}(\omega)$ na skok jednostkowy $x(t) = \mathcal{A}(t)$.

Sygnał wejściowy narasta od zera do jedności w nieskończenie krótkim czasie. Skokowa zmiana poziomu sygnału na wyjściu filtru jest rozciągnięta w czasie. Jako czas narastania t_n sygnału wyjściowego określamy czas, w którym sygnał wyjściowy narasta od swojej minimalnej do maksymalnej wartości. Udowodnić związek $t_n W = 2\pi = \text{const}$.

Udowodnić, że poziom przesterowania sygnału wyjściowego (ponad poziom jednostkowy) jest niezależny od szerokości W pasma przepustowego filtru. ●

Wyznaczamy sygnał wyjściowy filtru

$$\mathcal{A}_W(t) = F^{-1}\{\Pi_{2W}(\omega)X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{j\omega t} d\omega =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{\cos \omega t}{j\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$$

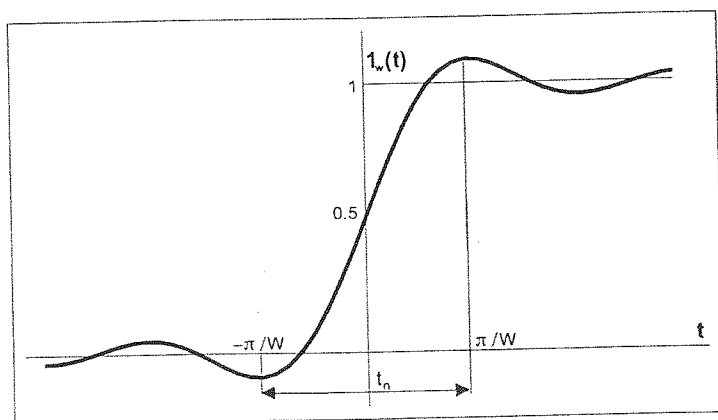
Pierwsza całka w powyższym wyrażeniu jako całka z funkcji nieparzystej w granicach symetrycznych jest równa zero. Druga całka jest całką z funkcji parzystej w granicach symetrycznych, a więc możemy dalej zapisać

$$\mathcal{A}_W(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^W \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$$

Po podstawieniu nowej zmiennej $z = \omega t$ otrzymujemy ostatecznie

$$\mathcal{A}_W(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{Wt} \text{Sa}(z) dz \quad (i)$$

Przebieg sygnału $\mathcal{A}_W(t)$ jest pokazany na rysunku 2.5. Z rysunku 2.5 wynika bezpośrednio, że czas narastania t_n sygnału wyjściowego mierzony pomiędzy sąsiednimi ekstremami wynosi $t_n = \frac{2\pi}{W}$, a więc rzeczywiście $t_n W = 2\pi = \text{const}$. Ze związku tego wynika, że im szersze jest pasmo przepustowe filtru, tym krótszy jest czas narastania sygnału wyjściowego filtru.



Rys. 2.5. Odpowiedź idealnego filtra dolnoprzepustowego na skok jednostkowy

Obliczamy teraz poziom przesterowania sygnału wyjściowego filtru (wartość sygnału wyjściowego filtru $\mathcal{A}_W(t)$ w chwili pierwszego maksimum $t = \frac{\pi}{W}$)

$$\mathcal{A}_W\left(\frac{\pi}{W}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{Sa}(z) dz = \text{const}.$$

Wartość przesterowania $\mathcal{A}_W\left(\frac{\pi}{W}\right)$ nie zależy od szerokości pasma przepustowego filtru. ■

26. Niech $x_W(t)$ oznacza sygnał utworzony z sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ poprzez usunięcie z jego widma wszystkich składowych o częstotliwościach $|\omega| \geq W$. Udowodnić, że

$$x_W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{\sin W(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau \quad (i)$$

Wiadomo, że $\lim_{W \rightarrow \infty} x_W(t) = x(t)$. Korzystając z tożsamości $\lim_{W \rightarrow \infty} \frac{\sin Wt}{\pi t} = \delta(t)$ pokazać, że również prawa strona tożsamości (i) dąży do $x(t)$, gdy $W \rightarrow \infty$. Rozważyć następnie sygnał $x(t)$ zawierający skokową nieciągłość w chwili $t = 0$. Sygnał ten można przedstawić w postaci $x(t) = x_c(t) + [x(0+) - x(0-)]\mathcal{A}(t)$, gdzie sygnał $x_c(t)$ jest sygnałem ciągłym w chwili $t = 0$. Korzystając z zależności (i) z zadania 25 udowodnić, że $\lim_{W \rightarrow \infty} x_W(0) = \frac{x(0+) + x(0-)}{2}$. ●

Eliminację składowych widma powyżej częstotliwości $|\omega| \geq W$ w sygnale $x(t)$ możemy zapisać jako operację $X_W(\omega) = X(\omega)\Pi_{2W}(\omega)$. W dziedzinie czasu operacji tej odpowiada splot. Pamiętając, że $\Pi_{2W}(\omega) \Leftrightarrow \frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wt)$ otrzymujemy

$$x_W(t) = x(t) * \frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wt) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{\sin W(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau$$

Korzystając z tożsamości $\lim_{W \rightarrow \infty} \frac{\sin Wt}{\pi t} = \delta(t)$ otrzymujemy

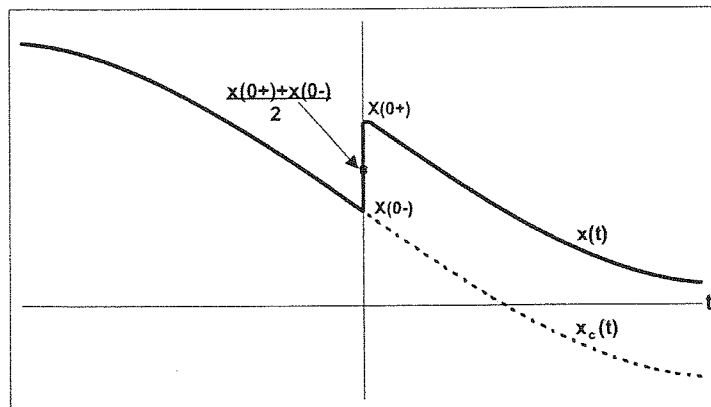
$$\lim_{W \rightarrow \infty} x_W(t) = \lim_{W \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{\sin W(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\lim_{W \rightarrow \infty} \frac{\sin W(t-\tau)}{\pi(t-\tau)} \right] d\tau$$

$$\lim_{W \rightarrow \infty} x_W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(t) = x(t).$$

przy założeniu, że sygnał $x(t)$ jest sygnałem ciągłym.

Rozpatrujemy teraz sygnał $x(t)$ zawierający skokową nieciągłość przedstawiony na rysunku 2.6

$$x(t) = x_c(t) + [x(0+) - x(0-)] \mathcal{A}(t)$$



Rys. 2.6. Sygnał nieciągły $x(t)$ oraz jego składowa ciągła $x_c(t)$

Dla sygnału ze skokową nieciągłością możemy napisać

$$x_W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(\tau) \frac{\sin W(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau + [x(0+) - x(0-)] \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(\tau) \frac{\sin W(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau$$

Zauważmy, że ostatnia całka przedstawia sygnał odpowiedzi idealnego filtra dolnoprzepustowego o szerokości pasma przepustowego W na skok jednostkowy $\mathcal{A}(t)$ (zależność (i), zadanie 25)

$$\mathcal{A}_W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(\tau) \frac{\sin W(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^W \text{Sa}(z) dz$$

Obliczamy teraz $\lim_{W \rightarrow \infty} x_W(0)$.

$$\lim_{W \rightarrow \infty} x_W(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(\tau) \lim_{W \rightarrow \infty} \frac{\sin W\tau}{\pi\tau} d\tau + [x(0+) - x(0-)] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^0 \text{Sa}(z) dz \right]$$

Otrzymujemy dalej

$$\lim_{W \rightarrow \infty} x_W(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(\tau) \delta(\tau) d\tau + \frac{x(0+) - x(0-)}{2} = x_c(0) + \frac{x(0+) - x(0-)}{2}$$

Ponieważ $x_c(0) = x(0-)$ mamy ostatecznie

$$\lim_{W \rightarrow \infty} x_W(0) = x(0-) + \frac{x(0+) - x(0-)}{2} = \frac{x(0+) + x(0-)}{2}$$

Zauważmy jeszcze, że

$$x_W(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

a więc

$$\lim_{W \rightarrow \infty} x_W(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}\{X(\omega)\}.$$

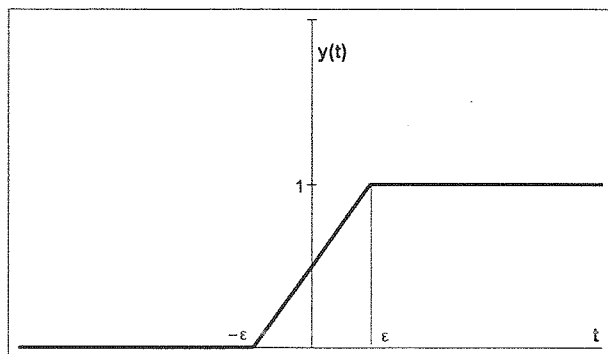
Wykazaliśmy zatem, że odwrotna transformacja Fouriera sygnału ze skokową nieciągłością generuje sygnał, którego wartość w chwili nieciągłości jest równa średniej arytmetycznej $\frac{x(0+) + x(0-)}{2}$ wartości sygnału $x(t)$. ■

27. Przez wygładzanie sygnału $x(t)$ rozumiemy operację określoną w następujący sposób

$$y(t) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} x(\tau) d\tau \quad (i)$$

Nazwę operacji (i) wyjaśnia rysunek 2.7; sygnałem wygładzanym jest nieciągły z definicji skok jednostkowy $\mathcal{A}(t)$, natomiast sygnał wygładzony zmienia się już w sposób ciągły.

Wyznaczyć związek pomiędzy widmem sygnału $x(t)$ a widmem sygnału wygładzonego $y(t)$. ●



Rys. 2.7. Sygnał skoku jednostkowego po wygładzeniu

Należy zauważyć, że operację wygładzania realizuje filtr o odpowiedzi impulsowej danej zależnością

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & , |t| < \varepsilon \\ 0 & , |t| \geq \varepsilon \end{cases}$$

gdyż

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-t-\varepsilon}^{t-\varepsilon} x(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} x(\tau) d\tau$$

Wobec tego $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$, przy czym $H(\omega) = Sa(\varepsilon\omega)$. Filtr o transmittancji $H(\omega) = Sa(\varepsilon\omega)$ tłumi wyższe częstotliwości w sygnale wejściowym $x(t)$, które są odpowiedzialne za jego szybkie zmiany. Spostrzeżenie to tłumaczy, dlaczego operację (i) nazywa się wygładzaniem sygnału. ■

28. Sygnał $v(t) = x(t) \cos \omega_0 t$ jest sygnałem wejściowym filtru o transmittancji $e^{j\varphi(\omega)}$ (charakterystyka amplitudowa tego filtru jest stała). Zakładamy,

że charakterystyka fazowa w pobliżu $\omega = 0$ może być aproksymowana szeregiem Taylora

$$\varphi(\omega) \approx \varphi(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \varphi'(\omega_0)$$

Udowodnić, że sygnał wyjściowy filtru przyjmuje postać

$$y(t) = x[t + \varphi'(\omega_0)] \cos [\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

Najwygodniej można rozwiązać to zadanie zastępując sygnał wejściowy filtru $v(t) = x(t) \cos \omega_0 t$ sygnałem $\underline{v}(t) = x(t) e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$, $v(t) = \Re_e[\underline{v}(t)]$. Jeżeli wyznaczymy odpowiedź $\underline{y}(t)$ filtru na sygnał wejściowy $\underline{v}(t)$, to poszukiwany sygnał $y(t) = \Re_e[\underline{y}(t)]$.

Transformata Fouriera sygnału wyjściowego filtru wynosi

$$\underline{Y}(\omega) = X(\omega - \omega_0) e^{j[\varphi(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\varphi'(\omega_0)]} = X(\omega - \omega_0) e^{j\varphi(\omega_0)} e^{j(\omega - \omega_0)\varphi'(\omega_0)}$$

Korzystając z właściwości (2.10) oraz (2.11) otrzymujemy

$$x[t + \varphi'(\omega_0)] e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega - \omega_0) e^{j(\omega - \omega_0)\varphi'(\omega_0)}$$

Tak więc

$$\underline{y}(t) = x[t + \varphi'(\omega_0)] e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi(\omega_0)} = x[t + \varphi'(\omega_0)] e^{j[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]}$$

Z uwagi na związek $y(t) = \Re_e[\underline{y}(t)]$ otrzymujemy ostatecznie

$$y(t) = x[t + \varphi'(\omega_0)] \cos [\omega_0 t + \varphi(\omega_0)]$$

Zauważmy jeszcze, że sygnał $y(t)$ możemy zapisać w postaci

$$y(t) = x(t - t_x) \cos \omega_0(t - t_0)$$

przy czym $t_x = -\varphi'(\omega_0)$ oraz $t_0 = -\frac{\varphi(\omega_0)}{\omega_0}$. Ostatnią zależność interpretuje-

my w ten sposób, że w sygnale iloczynowym $x(t)\cos\omega_0 t$ innemu opóźnieniu podlega sygnał $x(t)$, a innemu sygnał $\cos\omega_0 t$. ■

2.5 Próbkowanie sygnałów

29. Sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ jest sygnałem dolnopasmowym - $X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$. Tworzymy sygnał próbkowany

$$x_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \quad (i)$$

Wyznaczyć widmo sygnału próbkowanego, a następnie udowodnić, że w przypadku $W = \frac{\pi}{T}$, a więc gdy próbkujemy z częstotliwością dwukrotnie większą od częstotliwości granicznej W sygnału $x(t)$, filtracja sygnału próbkowanego $x_*(t)$ w idealnym filtrze dolnoprzepustowym o szerokości pasma przepustowego W i transmitancji $T\Pi_{2W}(\omega) \Leftrightarrow \text{Sa}(Wt)$ pozwala odtworzyć sygnał $x(t)$ z sygnału próbkowanego $x_*(t)$. Wyrazić wartości sygnału $x(t)$ w dowolnej chwili poprzez wartości jego próbek $x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ●

Korzystając z właściwości próbkującej delty Diraca możemy napisać

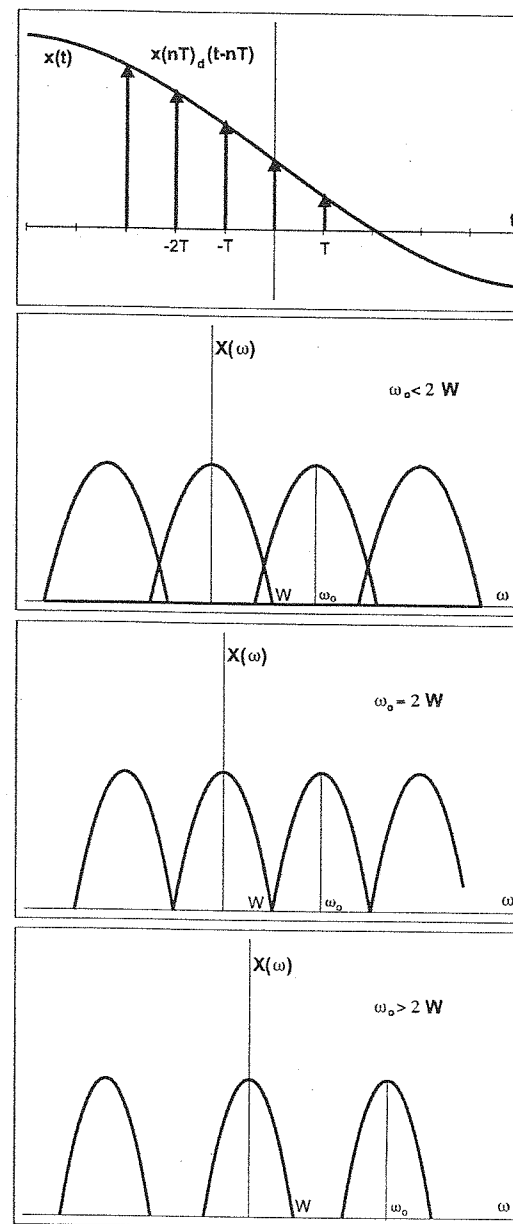
$$x_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = x(t)\delta_T(t)$$

$$X_*(\omega) = F\{x(t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega) = \frac{1}{T}X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Stwierdzamy, że widmo sygnału próbkowanego jest ciągiem przesuniętych z częstotliwością $n\omega_0 = n\frac{2\pi}{T}$ widm sygnału $x(t)$

$$X_*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0) \quad (ii)$$

Jeżeli częstotliwość próbkowania jest za mała, $\omega_0 < 2W$, segmenty $X(\omega - n\omega_0)$ widma sygnału próbkowanego zachodzą na siebie i odtworzenie sygnału oryginalnego



Rys. 2.8. Wpływ częstotliwości próbkowania na widmo sygnału próbkowanego

nalnego $x(t)$ z sygnału próbkowanego $x_*(t)$ na drodze filtracji dolnoprzepustowej nie jest możliwe. Odtworzenie takie jest możliwe tylko wtedy, gdy $\omega_0 < 2W$. Opisane przypadki przedstawia rysunek 2.8.

Założmy, że sygnał próbkowany $x_*(t)$ jest sygnałem wejściowym idealnego filtra dolnoprzepustowego o transmitancji $T \Pi_{2W}(\omega) \Leftrightarrow \text{Sa}(Wt)$ ($\omega_0 = 2W$, a więc $WT = \pi$). Sygnał wyjściowy filtru wynosi $x(t)$, gdyż filtr odfiltrowuje tylko wstęgę główną $X(\omega)$ widma sygnału próbkowanego

$$X(\omega) = T \Pi_{2W}(\omega) X_*(\omega)$$

Równocześnie w dziedzinie czasu jest spełniony związek

$$x(t) = x_*(t) * \text{Sa}(Wt) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] * \text{Sa}(Wt)$$

$$x_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}[W(t - nT)]$$

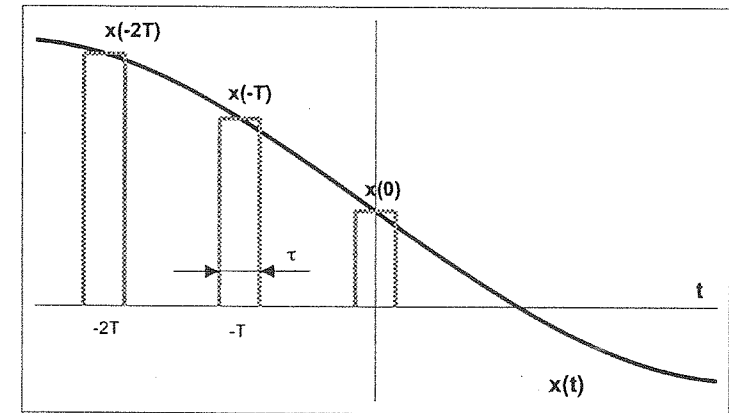
wyrażający wartości sygnału dolnoprzepustowego $x(t)$ w dowolnej chwili poprzez wartości jego dyskretnych próbek $x(nT)$.

Treść tego zadania przedstawia twierdzenie o próbkowaniu Kotelnikowa-Shannona w jego najprostszej postaci. ■

30. W najprostszej wersji twierdzenia o próbkowaniu (porównaj zadanie 29) próbki sygnału $x(nT)$ były odwzorowane w amplitudę impulsów Diraca $x(nT) \rightarrow x(nT) \delta(t - nT)$. Postępowanie takie ze względów praktycznych jest niemożliwe. Założmy, że próbki $x(nT)$ odwzorowujemy w amplitudę impulsów prostokątnych (o czasie trwania $\tau < T$) $x(nT) \rightarrow x(nT) \Pi_{\tau}(t - nT)$. Wyznaczyć widmo sygnału próbkowanego

$$x_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \Pi_{\tau}(t - nT) \quad (i)$$

Taki rodzaj próbkowania jest nazywany chwilowym. Przykładowa realizacja sygnału próbkowania chwilowego została przedstawiona na rysunku 2.9.



Rys. 2.9. Sygnał próbkowania chwilowego

Zakładamy, że sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ jest sygnałem dolnoprzepustowym o szerokości widma równej W ($X(\omega) = 0$ dla $|\omega| > W$). ●

Sygnał próbkowany możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} x_*(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \Pi_{\tau}(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) [\Pi_{\tau}(t) * \delta(t - nT)] = \\ &= \Pi_{\tau}(t) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] \end{aligned}$$

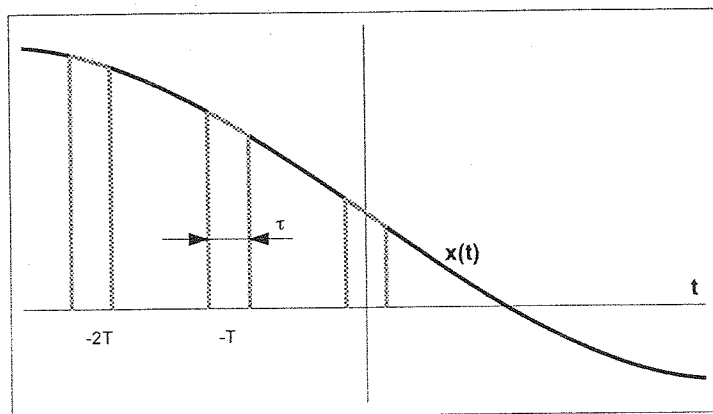
Widmo sygnału próbkowania idealnego $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0)$

zostało wyprowadzone w zadaniu 29. Dla próbkowania chwilowego otrzymujemy zatem

$$x_*(t) \Leftrightarrow X_*(\omega) = \frac{\tau}{T} \text{Sa} \frac{\omega\tau}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0) \quad (ii)$$

Widmo sygnału próbkowanego jest ciągiem przesuniętych widm sygnału próbkowanego, jednakże w odróżnieniu od przypadku próbkowania idealnego poszczególne segmenty są zniekształcone przez widmo impulsu prostokątnego. Zniekształcenia te są nazywane zniekształceniami apertury. W celu ich eliminacji przy odtwarzaniu sygnału oryginalnego należy w miejsce idealnego filtra dolnoprzepustowego stosować filtr o transmitancji $\left[\frac{\tau}{T} \text{Sa} \frac{\omega\tau}{2} \right]^{-1}$. ■

31. W próbkowaniu chwilowym opisanym w zadaniu 30 zostaje zachowany kształt impulsów prostokątnych, a zmienia się jedynie ich amplituda. W próbkowaniu naturalnym grzbiety impulsów prostokątnych "powtarza" sygnał próbkowany $x(t)$. Wyznaczyć widmo sygnału $x_*(t)$ próbkowania naturalnego; przykładowa realizacja tego sygnału jest pokazana na rysunku 2.10. Zakładamy, że sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ jest sygnałem dolnopasmowym o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$). ●



Rys. 2.10. Sygnał próbkowania naturalnego

Sygnał próbkowania naturalnego możemy zapisać w postaci $x_*(t) = x(t)c(t)$, gdzie $c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_{\tau}(t-nT)$ jest ciągiem impulsów prostokątnych o czasie

trwania τ i okresie powtarzania T . Okresowy sygnał $c(t)$ przedstawiamy za pomocą wykładniczego szeregu Fouriera

$$c(t) = \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\pi\varepsilon) e^{jn\omega_0 t}$$

gdzie $\varepsilon = \frac{\tau}{T}$ jest współczynnikiem wypełnienia ciągu impulsów, a $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ jest częstotliwością próbkowania.

W dalszym ciągu otrzymujemy

$$x_*(t) \Leftrightarrow X_*(\omega) = F \left\{ \varepsilon x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\pi\varepsilon) e^{jn\omega_0 t} \right\}$$

Korzystamy teraz z właściwości (2.11)

$$X_*(\omega) = \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(n\pi\varepsilon) X(\omega - n\omega_0) \quad (i)$$

Widmo sygnału próbkowania naturalnego jest ciągiem przesuniętych widm sygnału próbkowanego, ale wysokość każdego segmentu jest modyfikowana przez niezależny od częstotliwości współczynnik $\text{Sa}(n\pi\varepsilon)$. Ta właśnie cecha istotnie różni próbkowanie chwilowe od próbkowania naturalnego. ■

32. Sygnał dolnopasmowy $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$) może być wyrażony poprzez swoje próbki pobierane z okresem T , $W = \frac{\pi}{T}$ (porównaj zadanie 29)

$$x_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}W(t-nT)$$

Udowodnić podobny związek dla sygnału opóźnionego $x(t+\tau)$

$$x(t+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\tau+nT) \text{Sa}W(t-nT) \quad (\text{i})$$

Korzystając ze związku (i), udowodnić tożsamość ($a \leq W \leq \frac{\pi}{T}$)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(\tau+nT)}{\tau+nT} \frac{\sin W(t-nT)}{W(t-nT)} = \frac{\sin a(t+\tau)}{t+\tau} \quad (\text{ii})$$

Korzystając ze związku (ii), udowodnić tożsamość

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{(\alpha - n\pi)^2} = 1 \quad (\text{iii})$$

gdzie $\alpha = Wt$. ●

Jeżeli sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ jest dolnopasmowy ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$) to również sygnał $x(t+\tau) \Leftrightarrow X(\omega)e^{j\omega\tau}$ jest dolnopasmowy. Wynika stąd, że filtracja sygnału próbkowania idealnego $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\tau+nT)\delta(t-nT)$ w filtrze $T\Pi_{2W}(\omega) \Leftrightarrow \text{Sa}(Wt)$ pozwala na odtworzenie sygnału próbkowanego

$$x(t+\tau) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\tau+nT)\delta(t-nT) \right] * \text{Sa}(Wt) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\tau+nT) \text{Sa}W(t-nT)$$

Tożsamość (ii) wynika bezpośrednio ze związku (i), jeżeli dokonamy w nim podstawienia $x(t) = \frac{\sin at}{t}$.

Po podstawieniu w tożsamości (ii) $t = -\tau$, $a = W$ oraz $Wt = \alpha$ otrzymujemy kolejną tożsamość (iii). ■

33. Dolnopasmowy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$) jest sygnałem wejściowym filtru o transmitancji

$H(\omega)$. Udowodnić, że sygnał wyjściowy filtru $y(t)$ może być przedstawiony w postaci

$$y(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h_{2W}(t-nT) \quad (\text{i})$$

gdzie $h_{2W}(t)$ jest odpowiedzią impulsową filtru o transmitancji $\Pi_{2W}(\omega)H(\omega)$.

Spełniony jest oczywiście związek

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Z zasady próbkowania idealnego omówionego w zadaniu 29 wynika, że

$$X(\omega) = T \Pi_{2W}(\omega) X_*(\omega)$$

gdzie $X_*(\omega)$ jest widmem sygnału próbkowania idealnego

$$x_*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT).$$

Łącząc ostatnie dwie zależności otrzymujemy

$$Y(\omega) = X_*(\omega)T\Pi_{2W}(\omega)H(\omega)$$

Przechodzimy do dziedzin czasu

$$y(t) = T F^{-1}\{X_*(\omega)\} * F^{-1}\{\Pi_{2W}(\omega)H(\omega)\}$$

Druga transformata odwrotna jest równa z definicji odpowiedzi impulsowej $h_{2W}(t)$ filtru $H(\omega)$ o usuniętych składowych widmowych powyżej $|\omega| > W$. W dalszym ciągu mamy

$$y(t) = \left[T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \right] * h_{2W}(t)$$

Ostatecznie

$$y(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h_{2W}(t - nT)$$

Zauważmy jeszcze, że odpowiedzią filtru na wymuszenie opóźnione $x(t + \tau)$ jest sygnał $y(t + \tau)$. Podstawiając w związku (i) $x(t + \tau)$ zamiast $x(t)$, otrzymujemy zależność

$$y(t + \tau) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\tau + nT) h_{2W}(t - nT) \quad (ii)$$

podobną do zależności (i) z zadania 32. ■

34. Korzystając z zależności (ii) wyprowadzonej w zadaniu 33, udowodnić tożsamość

$$x'\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = -W \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2} x(\tau + nT) \quad (i)$$

przy czym $Wt = \pi$. ●

Interesuje nas wartość pochodnej sygnału $x'(t)$, a więc należy rozważyć jako filtr układ różniczkujący o transmitancji $H(\omega) = j\omega$. Odpowiedź impulsowa tego filtru przy obcięciu jego charakterystyk dla $|\omega| > W$ wynosi

$$\Pi_{2W}(\omega)(j\omega) \Leftrightarrow h_{2W}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W j\omega e^{j\omega t} d\omega = \frac{Wt \cos Wt - \sin Wt}{\pi t^2}$$

W zależności (ii) z zadania 33 podstawiamy teraz $t = \frac{T}{2}$

$$x'\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\tau + nT) h_{2W}\left(\frac{T}{2} - nT\right)$$

Po obliczeniu wartości $h_{2W}\left(\frac{T}{2} - nT\right)$ z uwzględnieniem założenia $WT = \pi$ otrzymujemy dowodzoną tożsamość (i). ■

35. Sygnał $x(t)$ jest sygnałem dolnopasmowym o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$); zakres zmienności sygnału jest ograniczony $|x(t)| \leq M$. Korzystając z zależności (i) z zadania 34 oraz z zależności (iii) z zadania 32 udowodnić nierówność Bernsteina $|x'(t)| \leq WM$. ●

Z założeń zadania wynika, że $|x(\tau + nT)| \leq M$ dla dowolnych τ, n, T . Z zależności (i) z zadania 34 otrzymujemy

$$\left| x'\left(\tau + \frac{T}{2}\right) \right| \leq WM \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2} = WM$$

gdyż $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2} = 1$ na mocy zależności (iii) z zadania 32 dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ponieważ τ oraz T są zupełnie dowolne, to z faktu, że $\left| x'\left(\tau + \frac{T}{2}\right) \right| \leq WM$ wynika, że $|x'(t)| \leq WM$.

Nierówność Bernsteina można udowodnić w sposób bardziej bezpośredni.

Ponieważ $x'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$, zatem

$$\begin{aligned} |x'(t)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |j\omega| |X(\omega)| d\omega \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |\omega| |X(\omega)| d\omega \leq \frac{W}{2\pi} \int_{-W}^W |X(\omega)| d\omega \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że podobnie

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

a więc

$$|x(t)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |X(\omega)| d\omega$$

Podstawiając $|x(t)| \leq M = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |X(\omega)| d\omega$ w ograniczeniu na pochodną sygnału $x'(t)$, otrzymujemy nierówność Bernsteina. Nierówność Bernsteina wyraża fakt, że sygnał o ograniczonym zakresie zmienności, zajmujący skończone pasmo nie może zmieniać się dowolnie szybko. ■

36. Twierdzenie o próbkowaniu orzeka (porównaj zadanie 29), że dolnopasmowy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$) może być wyrażony poprzez swoje próbki $x(nT)$ pobierane z okresem $T = \frac{\pi}{W}$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}W(t - nT) \quad (i)$$

W dowodzie powyższej zależności korzystaliśmy z właściwości próbkowej delty Diraca. Udowodnić zależność (i), podstawiając do całki odwrotnego przekształcenia Fouriera rozwinięcie funkcji $e^{j\omega t}$ w wykładniczy szereg Fouriera względem zmiennej ω w przedziale $[-W, W]$. ●

Wykładniczy szereg Fouriera funkcji $e^{j\omega t}$ przyjmuje postać (zwróćmy uwagę, że $\omega = \frac{2\pi}{2W} = \frac{\pi}{W} = T$)

$$e^{j\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jnT\omega} \\ |\omega| \leq W$$

Współczynniki szeregu Fouriera wynoszą

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} e^{-jnT\omega} d\omega = \frac{\sin W(t - nT)}{W(t - nT)}$$

i są funkcjami czasu $A_n = A_n(t)$.

Szereg Fouriera funkcji $e^{j\omega t}$ podstawiamy w całce odwrotnego przekształcenia Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) e^{jnT\omega} \right] d\omega = \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin W(t - nT)}{W(t - nT)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{jnT\omega} d\omega \right]$$

Ponieważ $\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{jnT\omega} d\omega = x(nT)$, zatem

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}W(t - nT)$$

37. Dolnopasmowy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| \leq W$) jest sygnałem wejściowym filtru o transmitancji $H(\omega)$. Niech $y(t)$ oznacza sygnał wyjściowy filtru. Udowodnić tożsamość

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) f(t - nT) \quad (i)$$

gdzie $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ jest odpowiedzią impulsową filtru o transmitancji

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{H(\omega)}, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad (ii)$$

W rozwiązaniu zadania wykorzystać sposób postępowania przedstawiony w zadaniu 36 - tym razem w wykładniczy szereg Fouriera rozwijamy funkcję $\frac{e^{j\omega t}}{H(\omega)}$ (w przedziale $\omega \in [-W, W]$).

Założmy, że sygnał $x(t)$ przekształcany jest w sygnał $y(t)$

$$y(t) = \alpha \int_0^{\infty} x(t-\tau) e^{-\alpha\tau} d\tau \quad (\text{iii})$$

Wyrazić wartości sygnału $x(t)$ poprzez wartości próbek sygnału $y(t)$. ●

Wykładniczy szereg Fouriera funkcji $\frac{e^{j\omega t}}{H(\omega)}$ w przedziale $\omega \in [-W, W]$ przyjmuje postać

$$\frac{e^{j\omega t}}{H(\omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) e^{jnT\omega}$$

Współczynniki rozwinięcia dane są zależnością

$$A_n(t) = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \frac{e^{-jnT\omega}}{H(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = f(t-nT)$$

Łącząc ostatnie dwie zależności, otrzymujemy

$$e^{j\omega t} = H(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT) e^{jnT\omega}$$

Ostatni związek wprowadzamy do całki odwrotnego przekształcenia Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT) e^{jnT\omega} \right] d\omega$$

Zamieniamy kolejność całkowania i sumowania

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H(\omega) e^{jnT\omega} d\omega \right]$$

Całka $\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H(\omega) e^{jnT\omega} d\omega$ wyznacza wartości próbek $y(nT)$ sygnału wyjściowego filtru. Ostatecznie otrzymujemy

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) f(t-nT)$$

Związki (i) oraz (ii) pozwalają wyznaczyć wartość sygnału $x(t)$ w dowolnej chwili z próbek $y(nT)$ sygnału wyjściowego $y(t)$ filtru pobudzanego sygnałem $x(t)$.

Nietrudno jest stwierdzić, że sygnał $y(t)$ dany zależnością (iii) powstaje w wyniku przekształcenia

$$y(t) = x(t) * \alpha \mathcal{A}(t) e^{-\alpha t}$$

a więc jest sygnałem wyjściowym filtru o transmitancji

$$h(t) = \alpha \mathcal{A}(t) e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$$

Zgodnie z zależnościami (i) oraz (ii) wyliczamy odpowiedź impulsową $f(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \left(1 + \frac{j\omega}{\alpha} \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{Wt \cos Wt + (Wt - 1) \sin Wt}{W \alpha t^2}$$

oraz

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n y(nT) \frac{(Wt - n\pi)(\cos Wt + \sin Wt) - \sin Wt}{\alpha(Wt - n\pi)^2}$$

38. Dolnopasmowy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| \leq W$) jest podawany na wejście dwóch filtrów o transmitancjach $H_1(\omega)$ oraz $H_2(\omega)$; sygnały wyjściowe filtrów wynoszą odpowiednio $g_1(t)$ oraz $g_2(t)$. Z okresem $T = \frac{2\pi}{W}$ pobierane są próbki $g_1(nT)$ oraz $g_2(nT)$ sygnałów wyjściowych filtrów. Obydwie próbki są pobierane jednocześnie, ale - jak można zauważyć - z częstotliwością dwukrotnie mniejszą aniżeli wynika to z twierdzenia o próbkowaniu. Udowodnić uogólnione twierdzenie o próbkowaniu mówiące o możliwości odtworzenia sygnału $x(t)$ z próbek $g_1(nT)$ oraz $g_2(nT)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [g_1(nT)y_1(t-nT) + g_2(nT)y_2(t-nT)] \quad (i)$$

gdzie

$$y_k(t) = \frac{1}{W} \int_{-W}^0 Y_k(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega \quad (ii)$$

$$k = 1, 2$$

przy czym funkcje $Y_1(\omega, t)$ oraz $Y_2(\omega, t)$ są rozwiązaniem poniższego układu równań (czas t dowolny, $-W \leq \omega \leq 0$)

$$\begin{cases} 1 = H_1(\omega)Y_1(\omega, t) + H_2(\omega)Y_2(\omega, t) \\ e^{jWt} = H_1(\omega+W)Y_1(\omega, t) + H_2(\omega+W)Y_2(\omega, t) \end{cases} \quad (iii)$$

Wskazówka: lewa strona układu równań (iii) jest okresowa z okresem $T = \frac{2\pi}{W}$, co oznacza, że funkcje $Y_1(\omega, t)$ oraz $Y_2(\omega, t)$ są również okresowe (w dziedzinie czasu) z tym samym okresem $T = \frac{2\pi}{W}$

$$Y_k(\omega, t+T) = Y_k(\omega, t)$$

$$k = 1, 2$$

Wykorzystać uogólnione twierdzenie o próbkowaniu (i), (ii) oraz (iii) do wyrażenia wartości dolnopasmowego sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, $X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| \leq W$ za pomocą:

- próbek sygnału $x(nT)$ oraz próbek jego pochodnej $x'(nT)$,
- sąsiadujących próbek sygnału $x(nT+\tau)$ oraz $x(nT-\tau)$, $|\tau| < \frac{T}{2}$. ●

Wyznaczamy najpierw wykładniczy szereg Fouriera dla funkcji $Y_k(\omega, t)e^{j\omega t}$, $k = 1, 2$ w przedziale $-W \leq \omega \leq 0$

$$Y_k(\omega, t)e^{j\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(k, t)e^{jnT\omega}$$

$$k = 1, 2$$

$$-W \leq \omega \leq 0$$

Współczynniki Fouriera wyliczamy z zależności

$$\varphi_n(k, t) = \frac{1}{W} \int_{-W}^0 [Y_k(\omega, t)e^{j\omega t}] e^{-jnT\omega} d\omega$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (iv)$$

$$k = 1, 2$$

Korzystając z okresowości funkcji $Y_k(\omega, t) = Y_k(\omega, t-nT)$, otrzymujemy

$$\varphi_n(k, t) = \frac{1}{W} \int_{-W}^0 Y_k(\omega, t-nT) e^{j\omega(t-nT)} d\omega = y_k(t-nT)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

$$k = 1, 2$$

Dysponując szeregiem Fouriera (iv), możemy udowodnić kolejny związek

$$e^{j\omega t} = H_1(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t-nT) e^{jnT\omega} + H_2(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(t-nT) e^{jnT\omega} \quad (v)$$

$$|\omega| \leq W$$

Przemnożmy w tym celu obustronnie pierwsze równanie układu (iii) przez $e^{j\omega t}$ oraz uwzględnijmy rozkład w szereg Fouriera (iv) - stwierdzamy, że związek (v) jest spełniony dla $-W \leq \omega \leq 0$. Ważność związku (v) dla pozostałego przedziału częstotliwości $0 \leq \omega \leq W$ można wykazać mnożąc drugie równanie układu (iii) przez $e^{j\omega t}$ i ponownie wykorzystując szereg Fouriera (iv)

$$e^{j(\omega+W)t} = H_1(\omega+W) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t-nT)e^{jnT\omega} + H_2(\omega+W) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(t-nT)e^{jnT\omega}$$

Ponieważ $e^{jnT(\omega+W)} = e^{jnT\omega}$, a więc także

$$e^{j(\omega+W)t} = H_1(\omega+W) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t-nT)e^{jnT(\omega+W)} + H_2(\omega+W) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(t-nT)e^{jnT(\omega+W)}$$

Powyższa zależność ponownie obowiązuje dla $-W \leq \omega \leq 0$, ale ponieważ $0 \leq \omega + W \leq W$, to wnioskujemy, że związek (v) zachowuje swą ważność dla $-W \leq \omega \leq W$. Prawą stronę związku (v) podstawiamy do całki odwrotnego przekształcenia Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) \left[H_1(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t-nT) e^{jnT\omega} + H_2(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(t-nT) e^{jnT\omega} \right] d\omega$$

Po zamianie kolejności całkowania oraz sumowania otrzymujemy

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t-nT) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H_1(\omega) e^{jnT\omega} d\omega \right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(t-nT) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H_2(\omega) e^{jnT\omega} d\omega \right]$$

Wystarczy teraz zauważyć, że

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H_k(\omega) e^{jnT\omega} d\omega = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W G_k(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]_{t=nT} = g_k(nT)$$

$$k = 1, 2$$

aby móc zakończyć dowód uogólnionego twierdzenia o próbkowaniu wyrażonego związkami (i), (ii) oraz (iii).

Zajmiemy się teraz wyrażeniem przebiegu sygnału $x(t)$ poprzez próbki syg-

nału $x(nT)$ oraz próbki jego pochodnej $x'(nT)$ pobierane z okresem $T = \frac{2\pi}{W}$.

W tym przypadku

$$g_1(t) = x(t) \quad H_1(\omega) = 1$$

$$g_2(t) = x'(t) \quad H_2(\omega) = j\omega$$

oraz

$$\begin{cases} Y_1(\omega, t) + j\omega Y_2(\omega, t) = 1 \\ Y_1(\omega, t) + j(\omega+W)Y_2(\omega, t) = e^{jWt} \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań są funkcje

$$Y_1(\omega, t) = 1 - \frac{\omega}{W} (e^{jWt} - 1)$$

$$Y_2(\omega, t) = \frac{1}{jW} (e^{jWt} - 1)$$

którym zgodnie z zależnością (ii) odpowiadają przebiegi

$$y_1(t) = \frac{4\sin^2 \frac{Wt}{2}}{W^2 t^2}$$

$$y_2(t) = \frac{4\sin^2 \frac{Wt}{2}}{W^2 t^2}$$

Korzystając z uogólnionego twierdzenia o próbkowaniu (i) otrzymujemy poszukiwaną reprezentację sygnału $x(t)$ poprzez próbki $x(nT)$ oraz próbki pochodnej $x'(nT)$

$$x(t) = 4\sin^2 \frac{Wt}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{x(nT)}{(Wt - 2n\pi)^2} + \frac{x'(nT)}{W(Wt - 2n\pi)} \right]$$

W drugim rozważanym przypadku, gdy pobieramy dwie sąsiadujące ze sobą próbki $x(nT + \tau)$ oraz $x(nT - \tau)$, $|\tau| < \frac{T}{2}$, możemy przyjąć, że

$$\begin{aligned} g_1(t) &= x(t + \tau) & H_1(\omega) &= e^{j\omega\tau} \\ g_2(t) &= x'(t - \tau) & H_2(\omega) &= e^{-j\omega\tau} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{cases} e^{j\omega\tau} Y_1(\omega, t) + e^{-j\omega\tau} Y_2(\omega, t) = 1 \\ e^{j\tau(\omega+W)} Y_1(\omega, t) + e^{-j\tau(\omega+W)} Y_2(\omega, t) = e^{jWt} \end{cases}$$

Z powyższego układu równań wyznaczamy dwie niewiadome funkcje $Y_1(\omega, t)$ oraz $Y_2(\omega, t)$, a następnie - zgodnie z zależnością (ii) - odpowiadające im przebiegi $y_1(t)$ oraz $y_2(t)$. Sygnał $x(t)$ jest opisany następującą zależnością

$$x(t) = \frac{\cos W\tau - \cos Wt}{W \sin W\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{x(nT + \tau)}{t - nT - \tau} - \frac{x(nT - \tau)}{t - nT + \tau} \right]$$

2.6. Właściwości energetyczne sygnałów

39. Udowodnić twierdzenie Parsevala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (i)$$

Zakładamy, że sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ przyjmuje wartości zespolone.

Korzystając z twierdzenia Parsevala (i), oblicz wartości całek niewłaściwych

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2(Wt) dt \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^4(Wt) dt. \quad \bullet$$

Korzystając z właściwości (2.16), wnioskujemy, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = F\{|x(t)|^2\}_{\omega=0}$$

Dla wyznaczenia wartości powyższej całki niewłaściwej należy znaleźć transformatę Fouriera sygnału $|x(t)|^2 = x^*(t)x(t)$. Na mocy właściwości (2.14) oraz (2.4) mamy

$$F\{|x(t)|^2\}_{\omega=0} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(-\nu) X(\omega - \nu) d\nu \right]_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(-\nu) X(-\nu) d\nu$$

Po prostej zamianie zmiennych otrzymujemy

$$F\{|x(t)|^2\}_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) X^*(\nu) d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

co kończy dowód twierdzenia Parsevala (i).

Obliczamy teraz wartości całek

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2(Wt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\pi}{W} \Pi_{2W}(\omega) \right|^2 d\omega = \frac{\pi}{2W^2} \int_{-W}^W d\omega = \frac{\pi}{W}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^4(Wt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\pi}{W} \Lambda_{4W}(\omega) \right|^2 d\omega = \frac{\pi}{W^2} \int_0^{2W} \left(1 - \frac{\omega}{2W}\right)^2 d\omega = \frac{2\pi}{3W}$$

40. Rozszerzeniem twierdzenia Parsevala (2.20) jest twierdzenie Rayleigha (sygnały $x(t)$ oraz $y(t)$ przyjmują wartości rzeczywiste)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)Y^*(\omega) d\omega \quad (i)$$

Udowodnić twierdzenie Rayleigha, a następnie obliczyć wartość całki nieoznaczonej $\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^3(Wt) dt$. $\bullet$

Korzystając z właściwości (2.16) oraz (2.14), otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt = F\{x(t) y(t)\}_{\omega=0} = \left[\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) \right]_{\omega=0} =$$

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) Y(\omega - \nu) d\nu \right]_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) Y(-\nu) d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) Y^*(\nu) d\nu$$

Ostatnie przekształcenie wynika z właściwości (2.5).

Twierdzenie Rayleigha jest także słuszne dla sygnałów przybierających wartości zespolone

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega) d\omega$$

Obliczamy wartość całki niewłaściwej

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^3(Wt) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2(Wt) \text{Sa}(Wt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{W} \Lambda_{4W}(\omega) \left| \frac{\pi}{W} \Pi_{2W}(\omega) \right|^* d\omega = \\ &= \frac{\pi}{W^2} \int_0^W \left(1 - \frac{\omega}{2W}\right) d\omega = \frac{3\pi}{4W} \end{aligned}$$

41. Rozważamy klasę wszystkich sygnałów $y(t)$, których widmo $Y(\omega)$ znika powyżej częstotliwości $|\omega| > \Omega$, $Y(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > \Omega$. Chcemy za pomocą tych sygnałów aproksymować sygnały $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o nieograniczonej szerokości widma. Określamy miarę błędu tej aproksymacji jako $e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - y(t)]^2 dt$. Wykazać, że wartość błędu aproksymacji jest minimalna, gdy widma sygnałów $x(t)$ i $y(t)$ są identyczne w przedziale częstotliwości $|\omega| < \Omega$, $X(\omega) \equiv Y(\omega)$ dla $|\omega| < \Omega$. ●

Rozpisujemy definicję miary błędu aproksymacji

$$e^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt.$$

Dwukrotnie korzystamy z twierdzenia Parsevala (2.20) oraz twierdzenia Rayleigha (2.21)

$$\begin{aligned} 2\pi e^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\Omega}^{\Omega} |Y(\omega)|^2 d\omega - \int_{-\Omega}^{\Omega} X^*(\omega) Y(\omega) d\omega - \int_{-\Omega}^{\Omega} X(\omega) Y^*(\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_{\Omega}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega - \int_{-\Omega}^{\Omega} [X(\omega) - Y(\omega)][X^*(\omega) - Y^*(\omega)] d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_{\Omega}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\Omega}^{\Omega} [X(\omega) - Y(\omega)][X(\omega) - Y(\omega)]^* d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_{\Omega}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_{-\Omega}^{\Omega} |X(\omega) - Y(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

W ostatnim wyrażeniu pierwsze dwie całki nie zależą od widma sygnału $y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$, wartość trzeciej zaś całki jest nieujemna, gdyż wyrażenie podcałkowe jest także nieujemne. Wynika stąd, że miara błędu aproksymacji jest minimalna, gdy ostatnia całka równa się zero, a więc gdy rzeczywiście $X(\omega) \equiv Y(\omega)$ dla $|\omega| \leq \Omega$. ■

42. W teorii sygnałów przyjmuje się, że energia (wydzielona na jednostkowej rezystancji) rzeczywistego sygnału $x(t)$ wyraża się zależnością

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt. \quad (i)$$

Jeżeli energia sygnału wyrażona powyższą całką jest skończona, to sygnał $x(t)$ nazywamy sygnałem energetycznym. Nie każdy sygnał jest sygnałem energetycznym - przykładowo, ani sygnał harmoniczny $\cos \omega_0 t$, ani sygnał skoku jednostkowego $\delta(t)$ nie są sygnałami energetycznymi.

Twierdzenie Parsevala (2.20) orzeka, że dla sygnału rzeczywistego $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ zachodzi związek

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Biorąc pod uwagę definicję energii sygnału (i) stwierdzamy, że twierdzenie Parsevala umożliwia wyznaczanie energii sygnału również w dziedzinie częstotliwości

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (ii)$$

Struktura zależności (ii) pozwala traktować transformatę $S(\omega) = |X(\omega)|^2$ jako widmową gęstość energii sygnału

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

Widmowa gęstość energii $S(\omega) = |X(\omega)|^2$ jest transformatą Fouriera pewnej funkcji $R(\tau)$ – wykorzystując podstawowe własności przekształcenia Fouriera udowodnić, że

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \Leftrightarrow S(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (iii)$$

Wyznaczamy odwrotne przekształcenie Fouriera widmowej gęstości energii $S(\omega)$

$$\begin{aligned} F^{-1}\{S(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right] X^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

Po zamianie kolejności całkowania otrzymujemy

$$F^{-1}\{S(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega\tau} e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x(t)dt$$

Funkcję

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \Leftrightarrow |X(\omega)|^2 \quad (iv)$$

nazywamy funkcją autokorelacji rzeczywistego sygnału energetycznego $x(t)$. Widmowa gęstość energii jest więc transformatą Fouriera funkcji autokorelacji. Zauważmy, że spełniony jest związek $E = R(0)$.

Pojęcie funkcji autokorelacji oraz odpowiadającej jej widmowej gęstości energii (iii) można rozszerzyć dla przypadku sygnałów o wartościach zespolonych. Rozumowanie – podobnie jak w przypadku sygnałów rzeczywistych – rozpoczyna się od analizy twierdzenia Parsevala dla sygnału zespolonego (2.20)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Funkcję autokorelacji sygnału zespolonego określa się jako

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt \quad (iv)$$

43. Moc średnia rzeczywistego sygnału $x(t)$ w przedziale czasu $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ jest definiowana jako energia wydzielona na jednostkowej rezystancji, przypadająca na jednostkę czasu

$$P(T) = \frac{E}{T} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt \quad (i)$$

Jeżeli chcemy wyznaczyć średnią moc sygnału za cały czas jego trwania, to powyższe określenie modyfikujemy do postaci

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)dt \right] = \langle x^2(t) \rangle \quad (ii)$$

Jeżeli powyższa granica jest skończona, sygnał $x(t)$ nazywamy sygnałem mocy. Zauważmy, że moc sygnału energetycznego (o nieskończonym czasie trwania) jest zerowa. Istnieją sygnały, które nie są ani energetyczne, ani nie są sygnałami mocy – najprostszym przykładem takiego sygnału jest sygnał nara-

stający liniowo $x(t) = \mathcal{A}(t)$. Sygnały tego typu w rozważaniach praktycznych oraz teoretycznych nie mają jednak większego znaczenia. Wykorzystując pojęcie sygnału obciętego $x_T(t) \Leftrightarrow X_T(\omega)$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$

wyprowadzić zależność umożliwiającą obliczanie mocy sygnału w dziedzinie częstotliwości (analogia twierdzenia Parsewala (2.20)), a następnie zdefiniować widmową gęstość mocy sygnału mocy oraz wyznaczyć odpowiadającą jej funkcję autokorelacji sygnału mocy. ●

Moc sygnału za okres T wyznaczamy ze związku

$$P(T) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt$$

który teraz - wykorzystując twierdzenie Parsewala - możemy zapisać w postaci

$$P(T) = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega$$

Moc sygnału liczona za cały czas jego trwania jest równa $P = \lim_{T \rightarrow \infty} P(T)$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \right] d\omega$$

Ostatnia zależność pozwala wyznaczyć moc średnią sygnału w dziedzinie częstotliwości, zatem możemy przyjąć, że funkcja podcałkowa reprezentuje widmową gęstość mocy (sygnału mocy)

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|x_T(\omega)|^2}{T}$$

Poszukując dla powyższej transformaty odpowiednika w dziedzinie czasu możemy skorzystać z zależności (iv) wyprowadzonej w zadaniu 42

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|x_T(\omega)|^2}{T} \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t+\tau)x_T(t)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x(t)dt$$

Funkcję

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x(t)dt = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle \quad (\text{iii})$$

nazywamy funkcją autokorelacji sygnału mocy. Zauważmy, że spełniony jest związek $P = R(0)$. ■

44. Sygnał $x(t)$ jest sygnałem podawanym na wejście filtru o transmitancji $h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$; odpowiedź filtru wynosi $y(t)$. Udowodnić, że pomiędzy widmową gęstością energii sygnału wyjściowego $S_y(\omega)$ a widmową gęstością energii sygnału wejściowego $S_x(\omega)$ zachodzi związek

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega) \quad (\text{i})$$

Ponieważ

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

a więc także

$$|Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2$$

zatem

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

Filtracja sygnału wiąże się z modyfikacją jego widmowej gęstości energii poprzez kwadrat charakterystyki amplitudowej filtru; charakterystyka fazowa filtru nie ma wpływu na widmową gęstość energii sygnału. ■

45. Przez sygnał prawieokresowy rozumiemy sygnał o postaci

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

gdzie nie wszystkie częstotliwości ω_n są współmierne. Wyznaczyć funkcję autokorelacji sygnału prawieokresowego. ●

Obliczamy funkcję autokorelacji sygnału $x(t)$

$$R(\tau) = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle = a_0^2 + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos[\omega_n(t+\tau) + \theta_n] \rangle + \\ + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \cos[\omega_n t + \theta_n] \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_n a_k \langle \cos[\omega_n(t+\tau) + \theta_n] \cos(\omega_k t + \theta_k) \rangle$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych zamieniamy iloczyn funkcji cosinus na sumę dwóch funkcji cosinus, a następnie w całym wyrażeniu konsekwentnie uwzględniamy, że wartość średnia przebiegu harmonicznego jest równa zero $\langle \cos(\omega t + \theta) \rangle = 0$. Po uproszczeniach otrzymujemy

$$R(\tau) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \cos \omega_n \tau$$

Widmo gęstości mocy sygnału prawieokresowego ma charakter prążkowy. Znając funkcję autokorelacji możemy wyznaczyć moc sygnału prawie okresowego $P = R(0) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, która jest równa sumie mocy wszystkich jego składowych. ■

46. Udowodnić, że moc sygnału okresowego można wyznaczyć uśredniając jego energię za jeden okres (sygnał okresowy jest zawsze sygnałem mocy)

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt \quad (i)$$

gdzie T_0 jest okresem sygnału $x(t)$. Wyznaczyć moc sygnału harmonicznego $x(t) = a \cos \omega_0 t$. ●

Zauważmy, że wyrażenie określające moc średnią (zależność (ii), zadanie 42) jest granicą funkcji mocy $P(T)$ przy $T \rightarrow \infty$, tzn. $P = \lim_{T \rightarrow \infty} P(T)$, którą można wyznaczyć z definicji ciągowej granicy kładąc $T = 2NT'$ przy warunku $N \rightarrow \infty$, gdzie czas T' jest tak dobierany, aby obliczenie całki $\int_{-NT'}^{NT'} x^2(t) dt$ było jak najłatwiejsze. Otrzymujemy zatem

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT'} \int_{-NT'}^{NT'} x^2(t) dt$$

Dla sygnału okresowego o okresie T_0 przyjmujemy $T' = \frac{T_0}{2}$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT_0} \int_{-\frac{NT_0}{2}}^{\frac{NT_0}{2}} x^2(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt$$

Korzystając z zależności (i) stwierdzamy, że moc sygnału harmonicznego $x(t) = a \cos \omega_0 t$ jest równa $P = \frac{a^2}{2}$. ■

47. W celu bliższego wyjaśnienia sensu pojęcia funkcji autokorelacji należy rozważyć zagadnienie aproksymacji sygnału $x(t)$ za pomocą innego sygnału $v(t)$, $x(t) \approx \alpha v(t)$, gdzie α jest pewnym współczynnikiem, którego wartość należy tak dobrać, aby miara błędu aproksymacji był jak najmniejsza

$$\min_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \alpha v(t)]^2 dt$$

Wyznaczyć optymalną wartość współczynnika α oraz odpowiadającą jej minimalną wartość miary błędu aproksymacji. ●

W celu wyznaczenia optymalnej wartości współczynnika α rozpisujemy wyrażenie określające miarę błędu aproksymacji

$$e(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \alpha v(t)]^2 dt = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt - 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

Możemy zauważyć, że wyrażenie określające miarę błędu aproksymacji $e(\alpha)$ jest trójmianem kwadratowym ze względu na współczynnik α . Miara błędu aproksymacji jest minimalna dla wartości współczynnika α_0 danej poniższą zależnością

$$\alpha_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt}$$

Minimalna wartość miary błędu aproksymacji jest równa

$$e_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt - \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t) dt \right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt}$$

Korzystając z nierówności Schwarza

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt$$

możemy stwierdzić, że minimalna wartość miary błędu aproksymacji spełnia nierówność

$$0 \leq e_{\min} \leq \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

przy czym $e_{\min} = 0$, gdy $x(t) = \pm v(t)$ oraz $e_{\min} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$, gdy sygnały $x(t)$ i $v(t)$ są ortogonalne, tzn. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t) dt = 0$.

Wyrażenie określające optymalną wartość współczynnika α_0 przyjęto normalizować

$$\rho = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t) dt \right]^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt \right]}$$

Korzystając z nierówności Schwarza możemy stwierdzić, że wartość współczynnika ρ nie przekracza jedności, $0 \leq \rho \leq 1$.

Dla sygnałów ortogonalnych współczynnik $\rho = 0$, a błąd aproksymacji przyjmuje wartość największą. Sygnały ortogonalne możemy więc nazywać także sygnałami nieskorelowanymi.

Dla sygnałów identycznych $x(t) = \pm v(t)$ współczynnik $\rho = 1$ (miarą błędu aproksymacji jest równa $e_{\min} = 0$); sygnały takie możemy nazywać w pełni skorelowanymi.

Dla tych powodów współczynnik ρ jest nazywany współczynnikiem korelacji dwóch sygnałów.

Zauważmy, że centralną częścią definicji współczynnika korelacji jest całka $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t) dt$. Jeżeli dopuścimy w tej całce wzajemne przesunięcie funkcji

$R_{xv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t+\tau) dt$, to zdefiniujemy tym sposobem tzw. funkcję interkorelacji dwóch sygnałów. Jeżeli teraz w ostatniej definicji przyjmimy $v(t+\tau) = x(t+\tau)$, to ostatecznie otrzymamy określenie funkcji autokorelacji sygnału $x(t)$ - $R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau) dt$. Znajomość funkcji autokorelacji umożliwia wyznaczenie wartości współczynnika korelacji będącego unormowaną miarą podobieństwa sygnału $x(t)$ do sygnału przesuniętego $x(t+\tau)$. ■

48. Udowodnić, że funkcja autokorelacji rzeczywistego sygnału energetycznego spełnia nierówność

$$|R(\tau)| \leq |R(0)| = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt.$$

Funkcję autokorelacji $R(\tau)$ możemy przedstawić za pomocą odwrotnego przekształcenia Fouriera widmowej gęstości energii (przypominamy, że widmo amplitudowe $|X(\omega)|$ sygnału rzeczywistego jest funkcją parzystą)

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \cos \omega\tau d\omega$$

Przystępujemy do szacowania zakresu zmienności funkcji autokorelacji

$$|R(\tau)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 |\cos \omega\tau| d\omega \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = R(0)$$

$$|R(\tau)| \leq R(0)$$

Funkcja autokorelacji sygnału energetycznego osiąga maksimum dla $\tau = 0$, co jest zrozumiałe o tyle, że im mniejsze jest względne przesunięcie τ sygnału względem siebie, tym większa jest korelacja.

Zauważmy jeszcze, że widmowa gęstość energii $S(\omega) = |X(\omega)|^2$ jest funkcją rzeczywistą, a zatem odpowiadająca jej funkcja autokorelacji jest parzysta (dla sygnału $x(t)$ przyjmującego wartości rzeczywiste)

$$R(\tau) = R(-\tau)$$

Dowodzi się, że funkcja autokorelacji sygnału zespolonego jest funkcją hermitowską $R(-\tau) = R^*(\tau)$, przy czym nadal słuszna jest nierówność $|R(\tau)| \leq R(0)$. ■

49. Udowodnić, że funkcja autokorelacji rzeczywistego sygnału mocy

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x(t) dt$$

jest parzysta $R(\tau) = R(-\tau)$ oraz ograniczona $|R(\tau)| \leq R(0)$. ●

Dowodzimy parzystości funkcji autokorelacji sygnału mocy (zakładamy, że $\tau > 0$ - przy $\tau < 0$ dowód przebiega podobnie)

$$R(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-\tau)x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}-\tau} x(v)x(v+\tau) dv =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{-\frac{T}{2}} x(v)x(v+\tau) dv + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(v)x(v+\tau) dv + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} x(v)x(v+\tau) dv \right]$$

W ostatnim wyrażeniu granica pierwsza oraz trzecia są równe zero, a więc funkcja autokorelacji sygnału mocy jest funkcją parzystą $R(\tau) = R(-\tau)$.

W dowodzie drugiej właściwości funkcji autokorelacji sygnału mocy korzystamy z nierówności Schwarza

$$\left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t+\tau) dt$$

Uśredniając po czasie obydwie strony powyższej nierówności stwierdzamy, że $|R(\tau)|^2 \leq R^2(0)$ a więc również $|R(\tau)| \leq R(0)$. Stwierdzamy, że podstawowe właściwości funkcji autokorelacji sygnału mocy są takie same jak właściwości funkcji autokorelacji sygnału energetycznego. ■

50. Sygnał mocy $x(t)$ jest sygnałem wejściowym filtru $h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$; odpowiedź filtru wynosi $y(t)$. Udowodnić, że pomiędzy widmową gęstością mocy sygnału wyjściowego $S_y(\omega)$ a widmową gęstością mocy sygnału wejściowego $S_x(\omega)$ zachodzi związek $S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$. ●

Funkcja autokorelacji sygnału wyjściowego filtru jest dana granicą

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t+\tau)y(t) dt$$

którą po uwzględnieniu związku spłotowego

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)x(t-v)dv$$

możemy zapisać w postaci rozwiniętej

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} h(v)x(t-v)dv \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t+\tau-\lambda)d\lambda$$

Po zamianie kolejności całkowania i wykorzystaniu poniższego związku wynikającego z definicji funkcji autokorelacji

$$R_x(t+v-\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t-v)x(t+\tau-\lambda)dt$$

stwierdzamy, że pomiędzy funkcją autokorelacji sygnału wyjściowego a funkcją autokorelacji sygnału wejściowego jest spełniona zależność

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

równoważna w dziedzinie częstotliwości związkowi

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$$

Stwierdzamy, że podstawowe właściwości funkcji autokorelacji sygnału mocy oraz sygnału energetycznego są identyczne. ■

51. Energia rzeczywistego sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o skończonym czasie trwania T , $x(t) \equiv 0$, $|t| > T$ wynosi

$$E = \int_{-T}^T x^2(t)dt$$

Sygnał $x(t)$ jest sygnałem podawanym na wejście dolnoprzepustowego filtra $h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$. Dowodzi się, że można tak dobrać sygnał wejściowy $x(t)$ (przy zachowaniu przyjętych wcześniej założeń), aby energia sygnału wyjścio-

wego filtra $y(t)$ była maksymalna. Optymalny sygnał $x(t)$ jest dany rozwiązaniem równania całkowego

$$\lambda x(t) = \int_{-T}^T x(\tau)L(t-\tau)d\tau$$

$$L(t) \Leftrightarrow |H(\omega)|^2$$

wyznaczonym dla maksymalnej wartości własnej λ równania całkowego. Przyjmujemy postać funkcyjną optymalnego sygnału $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} a \cos \omega t, & |t| \leq T \\ 0, & |t| \geq T \end{cases}$$

Wyznaczyć amplitudę optymalnego sygnału $x(t)$ przy założeniu, że

$$H(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \bullet$$

Dla podanej w zadaniu transmitancji filtra mamy

$$L(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} \Leftrightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Poszukiwany sygnał $x(t)$ spełnia wobec tego równanie całkowe

$$2\alpha\lambda x(t) = \int_{-T}^T x(\tau)e^{-|t-\tau|}d\tau = \int_{-T}^t x(\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau + \int_t^T x(\tau)e^{\alpha(t-\tau)}d\tau$$

$$|t| < T$$

Powyższe równanie rozwiązujemy przy założeniu, że $x(t) = a \cos \omega t$. Po wykonaniu niezbędnych przekształceń otrzymujemy

$$2\alpha\lambda \cos \omega t = \frac{2\alpha \cos \omega t}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{\omega \sin \omega T - \alpha \cos \omega T}{\alpha^2 + \omega^2} e^{-\alpha T} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

Ostatnia zależność powinna być prawdziwa dla dowolnego $|t| < T$, co jest możliwe tylko wtedy, gdy spełnione są dwa dodatkowe związki

$$\omega \sin \omega T - \alpha \cos \omega T = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Poszukujemy rozwiązania równania całkowego dla maksymalnej wartości parametru λ_0 , którą wyznaczamy dla minimalnej wartości częstotliwości ω_0 będącej rozwiązaniem równania $\omega_0 \operatorname{tg} \omega_0 T = \alpha$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\alpha^2 + \omega_0^2}$$

Amplitudę sygnału $x(t) = a \cos \omega t$

$$a = \frac{\sqrt{E}}{\lambda_0} = \sqrt{E(\alpha^2 + \omega_0^2)}$$

określamy z wartości jego energii

$$E = a^2 \int_{-T}^T \cos^2 \omega t \, dt$$

52. Sygnałem wejściowym filtru o transmitancji $H(\omega)$ jest dolnopasmowy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o szerokości widma równej W , $X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$ oraz znanej energii E

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |X(\omega)|^2 d\omega$$

Korzystając z nierówności Schwarza (porównaj zadanie 21, zależność (ii)) dla całki określającej sygnał wyjściowy filtru $y(t)$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

udowodnić nierówność służącą do szacowania zakresu zmienności sygnału wyjściowego filtru

$$|y(t)|^2 \leq \frac{E}{2\pi} \int_{-W}^W |H(\omega)|^2 d\omega \quad (i)$$

Korzystając z nierówności Schwarza, otrzymujemy nierówność

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |X(\omega)|^2 d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |H(\omega)|^2 d\omega$$

która stanowi prawą stronę dowodzonej nierówności (i).

Rozważymy dwa interesujące przypadki szczególne nierówności (i). Przy założeniu $H(\omega) = 1$ pociągającym za sobą $y(t) = x(t)$ możemy oszacować zakres zmienności sygnału energetycznego o skończonym pasmie częstotliwości

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{EW}{\pi}}$$

Przy założeniu $H(\omega) = j\omega$ mamy $y(t) = x'(t)$ oraz

$$\int_{-W}^W |H(\omega)|^2 d\omega = \int_{-W}^W |\omega|^2 d\omega = \frac{2W^3}{3}$$

Otrzymujemy następujące oszacowanie zakresu zmienności pochodnej sygnału

$$|x'(t)| < W \sqrt{\frac{EW}{3\pi}}$$

53. Udowodnić, że sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o skończonej energii E , o szerokości widma równej W nie może zmieniać się szybciej aniżeli funkcja wykładnicza

$$|x(t)| \leq \sqrt{\frac{EW}{\pi}} e^{W|t|}$$

Zauważmy najpierw, że jeżeli $|\omega| \leq W$, to $|e^{-j\omega t}| = 1 < e^{W|t|}$. Z nierówności Schwarza (zadanie 21, zależność (ii)) wnioskujemy, że

$$\left| \int_{-W}^W |X(\omega)| d\omega \right|^2 \leq 2W \int_{-W}^W |X(\omega)|^2 d\omega = 4\pi WE$$

Szacujemy zakres zmienności sygnału

$$|x(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |X(\omega)| e^{j\omega t} d\omega \leq \frac{e^{W|t|}}{2\pi} \int_{-W}^W |X(\omega)| d\omega \leq \sqrt{\frac{EW}{\pi}} e^{W|t|}$$

54. Załóżmy, że energia sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ wynosi E_x a jego pochodnej $x'(t) \Leftrightarrow E_{x'}$. Wykorzystując nierówność Schwarz'a dla funkcji ($\alpha > 0$)

$$X(\omega)e^{j\omega t} = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} X(\omega) \frac{e^{j\omega t}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

udowodnić nierówność Szökefalviego-Nagy'ego

$$|x(t)| \leq \sqrt[4]{E_x E_{x'}} \quad (i)$$

Z nierówności Schwarz'a (zadanie 21, zależność (ii)) wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} |2\pi x(t)|^2 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} X(\omega) \frac{e^{j\omega t}}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} d\omega \right|^2 \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 + \omega^2) |X(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2\pi^2}{\alpha} (\alpha^2 E_x + E_{x'}) \end{aligned}$$

Po wykonaniu przekształceń otrzymujemy

$$|x(t)|^2 \leq \frac{\alpha E_x}{2} + \frac{E_{x'}}{2\alpha}$$

Ostatnia nierówność powinna być słuszna dla dowolnej wartości $\alpha > 0$ zatem nieznaną wartość współczynnika α możemy dobrać tak, aby prawostronne ograniczenie było jak najmniejsze (przy ustalonej z założenia energii E_x oraz energii $E_{x'}$). Nietrudno jest stwierdzić, że optymalna wartość parametru α

wynosi $\alpha = \sqrt{\frac{E_{x'}}{E_x}}$; po podstawieniu tej wartości do ostatniej nierówności otrzymujemy dowodzoną nierówność (i). ■

55. Sygnałem wejściowym filtru o transmitancji $h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$ jest sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o ustalonej energii E . Wykorzystując nierówność Schwarz'a, dobrać tak przebieg sygnału wejściowego $x(t)$, aby odpowiedź filtru w pewnej ustalonej chwili t_0 przybierała jak największą wartość. ●

Nierówność Schwarz'a (zadanie 21, zależność (ii)) stosujemy do wartości $y(t_0)$ sygnału wyjściowego filtru w interesującej nas chwili czasu t_0

$$|2\pi y(t_0)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 e^{j\omega t_0} d\omega$$

Ostatnia nierówność wyznacza maksymalną wartość sygnału odpowiedzi $y(t_0)$; z dowodu nierówności Schwarz'a wynika, że maksimum zostanie osiągnięte tylko w przypadku, gdy

$$\begin{aligned} X(\omega) &\propto H^*(\omega) e^{-j\omega t_0} \\ x(t) &\propto h^*(t_0 - t) \end{aligned}$$

Otrzymany wynik jest znany w teorii sygnałów pod nazwą zasady filtru dopasowanego. ■

56. Wyznaczyć dolnopasmowy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o ustalonej energii E , $X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$, zerujący się w chwilach $\pm a$, $x(-a) = x(a) = 0$, którego wartość $x(0)$ w chwili $t = 0$ jest maksymalna. ●

Korzystając z definicji odwrotnego przekształcenia Fouriera możemy napisać

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) d\omega \\ x(\pm a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\pm a\omega} d\omega \end{aligned}$$

Scalamy powyższe związki

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) [1 + \alpha_1 e^{ja\omega} + \alpha_2 e^{-ja\omega}] d\omega$$

gdzie α_1 oraz α_2 są dowolnymi stałymi. Z dowodu nierówności Schwarza (zadanie 21, zależność (ii)) zastosowanej do powyższej całki wnioskujemy, że próbka sygnału $x(0)$ przyjmie maksymalną wartość, jeżeli zostanie spełniony warunek

$$X(\omega) = k [1 + \alpha_1^* e^{-ja\omega} + \alpha_2^* e^{ja\omega}] d\omega$$

$$|\omega| \leq W$$

gdzie k jest dowolną stałą proporcjonalności. Biorąc pod uwagę, że $X(\omega) = 0$ dla $|\omega| > W$, wyznaczamy przebieg czasowy poszukiwanego sygnału

$$x(t) = k \left[\frac{\sin Wt}{t} + \alpha_1 \frac{\sin W(t-a)}{t-a} + \alpha_2 \frac{\sin W(t+a)}{t+a} \right]$$

Nieznane stałe α_1 oraz α_2 należy wyznaczyć z warunku $x(-a) = x(a) = 0$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{-2 \sin Wa}{2Wa + \sin 2Wa}$$

57. Sygnał $x(t) = \mathcal{A}(t)e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$ jest sygnałem wejściowym filtru dolno-przepustowego o charakterystyce amplitudowej

$$|H(\omega)| = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}$$

Wyznacz związek pomiędzy parametrami α oraz β tak, aby energia sygnału wyjściowego filtru była równa połowie energii sygnału wejściowego. ●

Energia sygnału wejściowego wynosi

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha}$$

Energię sygnału wyjściowego filtru znajdujemy z zależności

$$E_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 d\omega$$

Ponieważ

$$x(t) = \mathcal{A}(t)e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

zatem

$$E_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta^2}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)} d\omega = \frac{\beta}{2\alpha(\alpha + \beta)}$$

Po rozwiązaniu równania wynikającego z założeń zadania $E_x = 2E_y$ otrzymujemy poszukiwany związek $\alpha = \beta$. ■

58. Udowodnić, że funkcja autokorelacji sygnału energetycznego

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

może być wyrażona w postaci iloczynu spłotowego

$$R(\tau) = x(\tau) * x(-\tau) \quad (i)$$

Zapisujemy iloczyn spłotowy w postaci całki

$$x(\tau) * x(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)x(\tau-t)dt$$

Po zamianie zmiennych $-t = \lambda$ otrzymujemy poszukiwany związek

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt = x(\tau) * x(-\tau)$$

59. Rozważmy "nieregularny" grzebień Diraca (o różnych amplitudach poszczególnych prążków)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(t - nT) \quad (i)$$

Znaleźć warunek, przy którym sygnał $x(t)$ jest sygnałem energetycznym oraz wyznaczyć jego funkcję autokorelacji. ●

Funkcję autokorelacji sygnału (i) wyznaczamy korzystając z zależności (i) wyprowadzonej w zadaniu (58)

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\tau - nT) \right] * \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \delta(-\tau - mT) \right] = \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(\tau - nT) \right] * \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \delta(\tau + mT) \right] \end{aligned}$$

Przypominamy, że impuls Diraca posiada właściwość parzystości.

Z właściwości splotu wiadomo, że

$$\delta(\tau - t_1) * \delta(\tau - t_2) = \delta[\tau - (t_1 + t_2)]$$

co w naszym przypadku pozwala zapisać

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_n \alpha_m \delta[\tau + (m - n)T] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta(t - nT)$$

gdzie współczynniki A_n są określone szeregiem

$$A_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \alpha_{m+n}$$

Sygnał jest energetyczny, jeżeli jego energia jest skończona, $E = R(0) < \infty$ a więc gdy zbieżny jest szereg

$$A_0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m^2 < \infty$$

61. Sygnały deterministyczne cechują się tym, że dla dowolnej chwili czasu można dokładnie wyznaczyć ich wartość. Wartość sygnałów losowych można określać wyłącznie "z dokładnością" do prawdopodobieństwa. Ponieważ nie możemy podać przepisu funkcyjnego określającego wartości sygnału losowego, opisujemy go za pomocą funkcji gęstości prawdopodobieństwa charakteryzujących rozkład możliwych wartości sygnału.

Funkcję gęstości prawdopodobieństwa I rzędu definiuje się poprzez prawdopodobieństwo zdarzenia

$$f(x; t) \Delta x = \Pr \{x \leq x(t) < x + \Delta x\}$$

że w chwili t proces losowy $x(t)$ przyjmie wartość należącą do przedziału $[x, x + \Delta x)$.

Znajomość funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x; t)$ pozwala wyliczyć wartość średnią sygnału

$$\overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; t) dx$$

oraz jego wartość średniokwadratową

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x; t) dx$$

Podobnie definiuje się funkcję gęstości prawdopodobieństwa II rzędu

$$f(x_1, x_2; t, \tau) \Delta x_1 \Delta x_2 \approx \Pr \{x_1 \leq x(t) < x_1 + \Delta x_1, x_2 \leq x(t + \tau) < x_2 + \Delta x_2\}$$

Funkcja autokorelacji sygnału losowego $x(t)$ jest określona jako wartość średnia iloczynu wartości sygnału w chwilach t oraz $t + \tau$

$$R(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t, \tau) dx_1 dx_2 = \overline{x(t + \tau) x(t)} \quad (i)$$

Zakładamy, że realizacje procesu losowego są deterministycznymi sygnałami mocy. Udowodnić, że uśredniona widmowa gęstość mocy procesu losowego jest transformatą Fouriera uśrednionej po czasie jego funkcji korelacji własnej (i)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R(t, \tau) dt = \langle R(t, \tau) \rangle \Leftrightarrow S(\omega) \quad (ii)$$

Realizacje procesu losowego są deterministycznymi sygnałami mocy, zatem dla każdej z nich można określić funkcję autokorelacji (zależność (iii), zadanie 43)

$$r(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x(t) dt = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle$$

Transformata Fouriera funkcji autokorelacji realizacji sygnału losowego opisuje jej widmową gęstość mocy $r(\tau) \Leftrightarrow s(\omega)$. Widmową gęstość mocy sygnału losowego otrzymujemy uśredniając widmowe gęstości mocy jego poszczególnych realizacji

$$S(\omega) = \overline{s(\omega)} \Leftrightarrow \overline{r(\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)x(t) dt$$

$$S(\omega) \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R(t, \tau) dt = \langle R(t, \tau) \rangle$$

Ostatnia zależność określa sposób wyznaczania widmowej gęstości mocy procesu losowego (uśrednionej).

Rozważmy dokładniej sygnał losowy stacjonarny w szerszym sensie, dla którego funkcja autokorelacji nie zależy od aktualnego czasu t , a tylko od przesunięcia τ analizowanych chwil czasu, $R(t, \tau) \equiv R(\tau)$. W tym szczególnym przypadku otrzymujemy związek

$$S(\omega) \Leftrightarrow R(\tau)$$

będący tezą twierdzenia Wienera - Chinczyzna. ■

62. Wyznaczyć widmową gęstość mocy sygnału losowego $v(t) = x(t)\cos \omega_0 t$ gdzie $x(t)$ jest stacjonarnym sygnałem losowym o znanej funkcji autokorelacji własnej

$$R_x(\tau) \Leftrightarrow S_x(\omega)$$

Zgodnie z zależnością (iii) z zadania 43 wyznaczamy najpierw uśrednioną po czasie funkcję korelacji własnej sygnału losowego $v(t)$

$$\begin{aligned} \langle R_v(t, \tau) \rangle &= \overline{\langle x(t+\tau)\cos \omega_0(t+\tau)x(t)\cos \omega_0 t \rangle} = \\ &= \langle \frac{1}{2} \overline{x(t+\tau)x(t)} [\cos \omega_0 \tau + \cos (2\omega_0 t + \tau)] \rangle = \\ &= \langle \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos (2\omega_0 t + \tau) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{2} R_x(\tau) \langle \cos (2\omega_0 t + \tau) \rangle \end{aligned}$$

Ponieważ $\langle \cos (2\omega_0 t + \tau) \rangle = 0$, zatem

$$\langle R_v(t, \tau) \rangle = \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

Widmowa gęstość mocy sygnału losowego jest transformatą Fouriera uśrednionej po czasie funkcji korelacji własnej (zależność (ii), zadanie 61)

$$S_v(\omega) = \frac{1}{4} [S_x(\omega + \omega_0) + S_x(\omega - \omega_0)]$$

Zauważmy istotne podobieństwo pomiędzy powyższą zależnością obowiązującą dla sygnału harmonicznego o losowo uziemiennionej amplitudzie a zależnością (2.12) obowiązującą dla sygnałów deterministycznych. ■

63. Wyznaczyć widmową gęstość mocy dyskretnego synchronicznego sygnału losowego $x(t)$. Sygnał ten przyjmuje K dyskretnych wartości α_k , $k = 1, 2, \dots, K$ z prawdopodobieństwem równym odpowiednio p_k , przy czym $p_1 + p_2 + \dots + p_K = 1$. Sygnał $x(t)$ zmienia swoją wartość z częstotliwością taktowania $f_T = \frac{1}{T}$, gdzie T jest czasem trwania taktu sygnału (sygnały takie

są nazywane synchronicznymi). Zakładamy, że wartość sygnału w danym takcie nie ma żadnego wpływu na wartość sygnału w taktach następnych. ●

Przyjmijmy, że x_n oznacza wartość sygnału w n -tym takcie, $n = 0, \pm 1, \dots$. Wartość średnia sygnału

$$\overline{x}_n = \bar{x} = \sum_{k=1}^K \alpha_k p_k$$

oraz wartość średniokwadratowa

$$\overline{x_n^2} = \overline{x^2} = \sum_{k=1}^K \alpha_k^2 p_k$$

są stałe - nie zmieniają się z taktu na takt.

W celu wyznaczenia widmowej gęstości mocy rozważanego sygnału znajdziemy najpierw jego funkcję autokorelacji $R(t, \tau) = \overline{x(t+\tau)x(t)}$.

Jako pierwszy rozważymy przypadek, gdy przesunięcie chwil czasu $|\tau| \geq T$, a więc gdy chwile t oraz $t + \tau$ na pewno leżą w różnych taktach (powiedzmy w takcie j -tym oraz n -tym). Ponieważ wartości rozważanego sygnału w różnych taktach są niezależne od siebie, to

$$R(t, \tau) = \overline{x(t+\tau)x(t)} = \overline{x_n x_j} = \overline{x_n} \overline{x_j} = (\bar{x})^2$$

Jeżeli natomiast $|\tau| < T$, to chwile t oraz $t + \tau$ mogą znajdować się w tym samym takcie, ale nie muszą. Jeżeli znajdują się w różnych taktach, to wartość funkcji autokorelacji jest dana ostatnią zależnością. W przypadku przeciwnym (chwile t oraz $t + \tau$ znajdują się w tym samym takcie) wartość funkcji autokorelacji wynosi

$$R(t, \tau) = \overline{x(t+\tau)x(t)} = \overline{x_n^2} = \overline{x^2}$$

Z sytuacją tą mamy do czynienia wtedy, gdy $t \in [nT, (n+1)T - \tau]$ dla $\tau > 0$ oraz gdy $t \in [nT - \tau, (n+1)T]$ dla $\tau < 0$. Zgodnie z zależnością (iii) z zadania 43 uśredniamy po czasie funkcję autokorelacji $R(t, \tau)$

$$\langle R(t, \tau) \rangle = \begin{cases} (\bar{x})^2 & , |\tau| \geq T \\ \overline{x^2} - [\overline{x^2} - (\bar{x})^2] \frac{|\tau|}{T} & , |\tau| < T \end{cases}$$

Pamiętając, że $\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ jest wariancją badanego sygnału, otrzymujemy ostatecznie

$$\langle R(t, \tau) \rangle = (\bar{x})^2 + \sigma^2 \Lambda_{2T}(\tau)$$

Widmowa gęstość mocy dyskretnego sygnału synchronicznego jest równa

$$S(\omega) = F\{\langle R(t, \tau) \rangle\} = 2\pi (\bar{x})^2 \delta(\omega) + \sigma^2 T \text{Sa}^2 \frac{\omega T}{2}$$

Widmowa gęstość mocy synchronicznego sygnału dyskretnego ma charakter dolnopasmowy; składowa stała znika tylko wtedy, gdy zeruje się wartość średnia $\bar{x} = 0$ sygnału i wtedy

$$S(\omega) = \overline{x^2} T \text{Sa}^2 \frac{\omega T}{2}$$

2.7. Wzór sumacyjny Poissona

64. Sygnał $x_0(t) \Leftrightarrow X_0(\omega)$ zeruje się poza przedziałem $|t| \leq \frac{T}{2}$. Tworzymy

sygnał okresowy $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t + nT)$. Wyznaczyć transformatę Fouriera sygnału $x(t)$ oraz udowodnić, że określa ona szereg Fouriera sygnału $x(t)$. ●

Korzystając z własności próbkującej impulsu Diraca, możemy przedstawić sygnał $x(t)$ w postaci spłotu

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t + nT) = x_0(t) * \delta_T(t)$$

Znajdujemy teraz transformatę Fouriera sygnału $x(t)$

$$X(\omega) = X_0(\omega) \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X_0(n\omega_0)}{T} \delta(\omega - n\omega_0)$$

przy czym $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Odwrotna transformata Fouriera dana jest zależnością

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (i)$$

gdzie

$$\frac{X_0(n\omega_0)}{T} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_0(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

W ostatnich dwóch zależnościach rozpoznajemy szereg Fouriera okresowego sygnału $x(t)$. ■

65. Udowodnić wzór sumacyjny Poissona ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $x_0(t) \Leftrightarrow X_0(\omega)$)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (i)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t + nT) = x_0(t) * \delta_T(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_0(\omega) \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

Po podstawieniu $t = 0$ otrzymujemy przypadek specjalny wzoru Poissona

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(n\omega_0) \quad (ii)$$

66. Korzystając ze wzoru sumacyjnego Poissona (zależność (ii), zadanie 65),

wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|n|}$, $\alpha > 0$. ●

Z definicji przekształcenia Fouriera otrzymujemy

$$F\{e^{-\alpha|t|}\} = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Sumę rozważanego szeregu wyznaczamy ze wzoru sumacyjnego Poissona dla $T = 1$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|n|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi n)^2}$$

67. Korzystając ze wzoru sumacyjnego Poissona (zależność (ii), zadanie 65), udowodnić, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin W(t + nT)}{t + nT} = \omega_0 \frac{\sin(2N + 1)\omega_0 t}{\sin \omega_0 t}$$

przy czym $\omega = \frac{\pi}{T}$, a N jest częścią całkowitą liczby $\frac{WT}{2\pi}$. ●

W tabeli transformat znajdujemy parę transformat $\text{Sa}(Wt) \Leftrightarrow \frac{\pi}{W} \Pi_{2W}(\omega)$. Na mocy wzoru sumacyjnego Poissona otrzymujemy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin W(t + nT)}{t + nT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa} W(t + nT) = \frac{\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_{2W}(2n\omega_0) e^{j2n\omega_0 t}$$

Funkcja $\Pi_{2W}(2n\omega_0) = 0$ dla $2n\omega_0 > W$ oraz $\Pi_{2W}(2n\omega_0) = 1$ dla $2n\omega_0 < W$.

Jeżeli przyjmiemy, że N jest częścią całkowitą liczby $\frac{WT}{2\pi}$, $N = \left\lfloor \frac{WT}{2\pi} \right\rfloor$, to ostatnia suma równa się właśnie

$$\sum_{n=-N}^N e^{j2n\omega_0 t} = 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos 2n\omega_0 t = \frac{\sin(2N+1)\omega_0 t}{\sin \omega_0 t}$$

na mocy tożsamości trygonometrycznej

$$1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos nh = \frac{\sin\left(2N + \frac{1}{2}\right)h}{\sin \frac{1}{2}h}$$

68. Korzystając ze wzoru sumacyjnego Poissona (zależność (ii), zadanie 65), udowodnić tożsamość

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t+n)^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}} \cos 2\pi n t$$

W dowodzie należy wykorzystać parę transformat $e^{-\alpha t^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$. ●

Korzystając ze wzoru sumacyjnego Poissona dla $T=1$, otrzymujemy

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t+n)^2} = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n t} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\alpha}}$$

69. Korzystając ze wzoru sumacyjnego Poissona (zależność (ii), zadanie 65),

udowodnić, że jeżeli $x(t) = \int_{t-a}^{t+a} f(\tau) d\tau$, to $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t+2na) = \text{const}$. ●

Zauważmy najpierw, że

$$x(t) = f(t) * \Pi_{2a}(t) \Leftrightarrow 2aF(\omega) \text{Sa}(a\omega)$$

Ze wzoru sumacyjnego Poissona otrzymujemy zatem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t+2na) = \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(n \frac{\pi}{a}\right) e^{\frac{jn\pi t}{a}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(n \frac{\pi}{a}\right) \text{Sa}(n\pi) e^{\frac{jn\pi t}{a}}$$

Ponieważ $\text{Sa}(n\pi) = 0$ dla $n = \pm 1, \pm 2, + \dots$ oraz $\text{Sa}(0) = 1$, to z ostatniej zależności wnioskujemy, że

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t+2na) = F(0) = \text{const}$$

PRZEKSZTAŁCENIE HILBERTA

Przekształcenie Hilberta sygnału $x(t)$ jest definiowane w sposób następujący

$$H\{x(t)\} = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (3.1)$$

Definicja (3.1) przekształcenia Hilberta jest równoważna iloczynowi spłotowemu

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t)$$

Możemy zatem przyjąć, że sygnał kwadraturowy $\hat{x}(t)$ jest sygnałem wyjściowym filtru (tzw. filtru Hilberta lub kwadraturowego) o odpowiedzi impulsowej

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \Leftrightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega) = e^{-j\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -j, & \omega \geq 0 \\ j, & \omega \leq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Parę transformat (3.2) można wyprowadzić, korzystając z właściwości symetrii przekształcenia Fouriera (2.8) zastosowanej do pary transformat $\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$. Z postaci transmitancji (3.2) filtru kwadraturowego wnioskujemy, że filtr ten nie wpływa na widmo amplitudowe sygnału $x(t)$, przesuwając jedynie w fazie jego składowe widmowe o kąt $-\pi/2$. Z tego powodu sygnał $\hat{x}(t)$ jest nazywany sygnałem kwadraturowym.

Wykorzystując powyższe zależności, możemy zapisać związek

$$F\{\hat{x}(t)\} = \hat{X}(\omega) = [-j \operatorname{sgn} \omega] X(\omega) = \begin{cases} -jX(\omega), & \omega \geq 0 \\ jX(\omega), & \omega \leq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

określający transformatę Fouriera $\hat{X}(\omega)$ sygnału kwadraturowego $\hat{x}(t)$.

Transformatę Hilberta można wyznaczać bezpośrednio z definicji (3.1) lub wykorzystując zależność (3.3).

Przekształcenie Hilberta oraz związane z nim pojęcie sygnału analitycznego jest w głównej mierze wykorzystywane w analizie widmowej sygnałów wąskopasmowych.

3.1. Wyznaczanie transformat Hilberta

1. Wyznaczyć transformatę Hilberta sygnałów harmoniczných $\cos \omega_0 t$ oraz $\sin \omega_0 t$. ●

Biorąc pod uwagę, że przekształcenie Hilberta sprowadza się do przesunięcia składowych widmowych sygnału o $-\pi/2$ bez zmiany ich amplitudy, otrzymujemy wprost

$$\begin{aligned} H\{\cos \omega_0 t\} &= \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = \sin \omega_0 t \\ H\{\sin \omega_0 t\} &= \sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = -\cos \omega_0 t \end{aligned}$$

Można postąpić bardziej formalnie i zastosować częstotliwościową metodę (3.3) obliczania transformaty Hilberta. Rozważmy zatem sygnał

$$x(t) = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t = e^{j\omega_0 t}$$

Ponieważ

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

zatem

$$\hat{X}(\omega) = -2\pi j \delta(\omega - \omega_0) \Leftrightarrow -j e^{j\omega_0 t} = -j \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t$$

skąd wnioskujemy o słuszności związków (i). ■

2. Wyznaczyć metodą częstotliwościową oraz bezpośrednio z definicji przekształcenia Hilberta parę transformat

$$H\left\{\frac{1}{t^2 + 1}\right\} = \frac{t}{t^2 + 1}$$

W tabeli transformat Fouriera znajdujemy parę transformat przydatną dla rozwiązania zadania

$$e^{-\alpha|t|} \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Korzystając z właściwości symetrii (2.8) przekształcenia Fouriera, otrzymujemy nową parę transformat

$$\frac{1}{t^2 + 1} \Leftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$$

Korzystając z metody częstotliwościowej wyznaczania transformaty Hilberta (3.3), otrzymujemy

$$\hat{X}(\omega) = \pi e^{-|\omega|} e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{sgn}(\omega)$$

Obliczamy następnie odwrotną transformatę Fouriera

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-|\omega|} e^{-j\frac{\pi}{2}} \text{sgn}(\omega)] e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \left(j \int_{-\infty}^0 e^{\omega} e^{j\omega t} d\omega - j \int_0^{\infty} e^{-\omega} e^{j\omega t} d\omega \right) \\ \hat{x}(t) &= \frac{j}{2} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(1+jt)\omega} d\omega - \int_0^{\infty} e^{-(1-jt)\omega} d\omega \right) \end{aligned}$$

Po wykonaniu niezbędnych przekształceń otrzymujemy poszukiwaną parę transformat (i).

Przechodzimy do wyliczenia pary transformat (i) bezpośrednio z czasowej definicji przekształcenia Hilberta

$$H\left\{\frac{1}{t^2 + 1}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau^2 + 1)(t - \tau)} d\tau$$

Dokonujemy rozkładu funkcji podcałkowej na ułamki proste

$$H\left\{\frac{1}{t^2 + 1}\right\} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\tau^2 + 1} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B\tau}{\tau^2 + 1} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{t - \tau} d\tau \right]$$

Wartość środkowej całki wynosi zero, gdyż całkowana jest funkcja nieparzysta w granicach symetrycznych. Można również udowodnić, że i wartość ostatniej całki jest zerowa. Ponieważ $A = \frac{t}{t^2 + 1}$, otrzymujemy raz jeszcze poszukiwaną parę transformat (i)

$$H\left\{\frac{1}{t^2 + 1}\right\} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{t^2 + 1} \arctg \tau \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{t}{t^2 + 1}$$

3. Wyznaczyć pary transformat Hilberta

$$H\{\text{Sa} Wt\} = \frac{1 - \cos Wt}{Wt}$$

$$H\{\text{Sa}^2 Wt\} = \frac{1 - \text{Sa}^2 Wt}{Wt}$$

$$H\{e^{jat}\} = -j \text{sgn} \alpha e^{jat}$$

$$H\{\Pi_T(t)\} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{t + \frac{T}{2}}{t - \frac{T}{2}} \right|$$

3.2. Twierdzenia

4. Wykazać, że rzeczywisty sygnał $v(t) \Leftrightarrow V(\omega)$ oraz jego transformata Hilberta $\hat{v}(t)$ są ortogonalne

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) \hat{v}(t) dt = 0$$

W dowodzie należy wykorzystać twierdzenie Rayleigha (2.21). ●

Przypominamy twierdzenie Rayleigha dla sygnałów zespolonych

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega) d\omega$$

Założmy najpierw, że $x(t) = \hat{v}(t)$, a więc $X(\omega) = \hat{V}(\omega) = [-j \operatorname{sgn} \omega] V(\omega)$. Przyjmijmy również, że $y^*(t) = v^*(t)$, a więc $y(t) = v(t)$, skąd na mocy właściwości (2.4) przekształcenia Fouriera wnioskujemy, że $Y(\omega) = V^*(-\omega)$, a więc także $Y^*(\omega) = V(-\omega)$. Wykorzystujemy powyższe związki w twierdzeniu Rayleigha

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \hat{v}(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [-j \operatorname{sgn} \omega] V(\omega) V(-\omega) d\omega = \\ &= \frac{j}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 V(\omega) V(-\omega) d\omega - \int_0^{\infty} V(\omega) V(-\omega) d\omega \right] \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $V(\omega)V(-\omega) = |V(\omega)|^2$ jest funkcją parzystą, zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) \hat{v}(t) dt = 0$$

Zerowanie się powyższej całki oznacza, że sygnał oryginalny oraz odpowiadający mu sygnał kwadraturowy są ortogonalne. ■

5. Udowodnić związek

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt$$

oznaczający, że przekształcenie Hilberta nie zmienia energii sygnału. ●

Korzystając z twierdzenia Parsewala (2.20), otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Jeszcze raz korzystamy z twierdzenia Parsewala - tym razem dla sygnału kwadraturowego $\hat{x}(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |[-j \operatorname{sgn} \omega] X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Równość wartości obydwóch całek pozwala wnioskować o ortogonalności sygnału i jego transformaty Hilberta. ■

6. Udowodnić twierdzenie

$$H\{x(t) \cos \omega_0 t\} = x(t) \sin \omega_0 t$$

przy założeniu, że sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ jest dolnopasmowy $X(\omega) = 0$, $|\omega| > W$, przy czym $W < \omega_0$. ●

Przyjmijmy oznaczenie $y(t) = x(t) \cos \omega_0 t$. Z właściwości przekształcenia Hilberta wiemy, że

$$\hat{Y}(\omega) = [-j \operatorname{sgn} \omega] F\{x(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} [-j \operatorname{sgn} \omega] [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

Korzystając z założenia $W < \omega_0$, możemy napisać

$$\hat{Y}(\omega) = \frac{j}{2} [X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)] \Leftrightarrow x(t) \sin \omega_0 t$$

co kończy dowód. W podobny sposób można pokazać, że

$$H\{x(t) \sin \omega_0 t\} = -x(t) \cos \omega_0 t$$

7. Udowodnić twierdzenie Bedrosiana o transformacie Hilberta iloczynu dwóch sygnałów

$$H\{x(t)y(t)\} = x(t)H\{y(t)\} = x(t)\hat{y}(t) \quad (i)$$

przy założeniu, że sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ jest sygnałem dolnopasmowym, $X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$, a sygnał $y(t) \Leftrightarrow Y(\omega)$ jest sygnałem górnopasmowym, $Y(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| < W$ (pasma obydwóch sygnałów są rozłączne). ●

Iloczyn sygnałów $x(t)y(t)$ wyrażamy za pomocą odpowiednich odwrotnych transformat Fouriera

$$\begin{aligned} x(t)y(t) &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{j u t} du \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(v) e^{j v t} dv \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} X(u) Y(v) e^{j(u+v)t} dv \end{aligned}$$

Obliczamy transformatę Hilberta

$$\begin{aligned} H\{x(t)y(t)\} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} X(u) Y(v) H\{e^{j(u+v)t}\} dv = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} X(u) Y(v) j \operatorname{sgn}(u+v) e^{j(u+v)t} dv \end{aligned}$$

Z założenia o rozdzielności pasm sygnałów $x(t)$ oraz $y(t)$ możemy wnioskować, że $\operatorname{sgn}(u+v) = \operatorname{sgn}(v)$, dzięki czemu otrzymujemy

$$\begin{aligned} H\{x(t)y(t)\} &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} X(u) Y(v) j \operatorname{sgn}(v) e^{j(u+v)t} dv = \\ &= -\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{j u t} du \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(v) j \operatorname{sgn}(v) e^{j v t} dv \right] \end{aligned}$$

W pierwszej całce z łatwością rozpoznajemy odwrotną transformatę Fouriera, jeżeli natomiast chodzi o drugą całkę, to stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(v) j \operatorname{sgn}(v) e^{j v t} dv &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(v) H\{e^{j v t}\} dv = \\ &= H\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(v) e^{j v t} dv \right\} = H\{y(t)\} = \hat{y}(t) \end{aligned}$$

co kończy dowód twierdzenia Bedrosiana (i).

Zauważmy jeszcze, że zależność (i) udowodniona w zadaniu 6

$$H\{x(t) \cos \omega_0 t\} = x(t) \sin \omega_0 t$$

jest przypadkiem twierdzenia Bedrosiana, w którym $y(t) = \cos \omega_0 t$. ■

8. Sygnał analityczny $x_+(t)$ skojarzony z sygnałem $x(t)$ jest określony w następujący sposób

$$x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \quad (i)$$

Ponadto

$$x(t) = \Re\{x_+(t)\} \quad (ii)$$

Wyznaczyć transformatę Fouriera sygnału analitycznego $x_+(t) \Leftrightarrow X_+(\omega)$. ●

Pamiętając o właściwości (3.3) przekształcenia Hilberta otrzymujemy

$$X_+(\omega) = X(\omega) + j\hat{X}(\omega) = X(\omega) + j[-j \operatorname{sgn} \omega] X(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega), & \omega > 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases} \quad (iii)$$

Stwierdzamy, że transformata Fouriera sygnału analitycznego jest jednostronna - zawiera składowe widmowe wyłącznie o dodatnich częstotliwościach.

W uzupełnieniu wyjaśnimy, dlaczego z sygnałem (i) można związać pojęcie sygnału analitycznego, występującego w analizie funkcji zespolonych. Zamierzamy wykazać, że sygnał, którego transformata Fouriera jest określona wyłącznie dla dodatnich częstotliwości jest analityczny w sensie analizy zespolonej,

a to już wystarczy, by pomiędzy jego częścią rzeczywistą a urojoną zachodziły związki określone przekształceniem Hilberta.

Niech $X_+(\omega)$ oznacza prawostronną transformatę Fouriera, $X_+(\omega) \equiv 0$ dla $\omega < 0$. Przyjmując – dla ogólności rozważań – że t i σ ma charakter zespolony $z = t + j\sigma$ możemy zapisać odwrotne przekształcenie Fouriera

$$x_+(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty X_+(\omega) e^{j\omega z} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [X_+(\omega) e^{-\omega\sigma}] e^{j\omega t} d\omega$$

Zastanówmy się nad warunkami zbieżności ostatniej całki niewłaściwej. Przede wszystkim stwierdzamy, że

$$|x_+(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^\infty [X_+(\omega) e^{-\omega\sigma}] e^{j\omega t} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |X_+(\omega)| e^{-\omega\sigma} d\omega \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |X_+(\omega)| d\omega$$

Zauważmy, że ostatnia majoryzująca nierówność zachodzi tylko wtedy, gdy $\sigma \geq 0$, bowiem dla $\omega \geq 0$ mamy $e^{-\omega\sigma} \leq 1$. Równie istotnym spostrzeżeniem jest to, że dla transformaty Fouriera $X(\omega)$ dwustronnej ($X(\omega) \neq 0$ dla $\omega < 0$) nie znajdziemy podobnego ograniczenia z uwagi na nieokreślone zachowanie się wyrażenia $e^{-\omega\sigma}$.

Całka niewłaściwa $\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |X_+(\omega)| d\omega$ jest zbieżna z założenia o istnieniu transformaty Fouriera $X(\omega)$.

Na mocy kryterium porównawczego zbieżności całek niewłaściwych stwierdzamy wobec tego, że

$$|x_+(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |X_+(\omega)| e^{-\omega\sigma} d\omega < \infty \quad (\text{iv})$$

$$\sigma \geq 0$$

Interpretując powyższą nierówność, możemy powiedzieć, że funkcja $x_+(z)$ w górnej półpłaszczyźnie zespolonej $\sigma \geq 0$ jest ograniczona (nie wykazuje żąd-

nych osobliwości) - w języku analizy funkcji zespolonych - jest analityczna. Podkreślamy raz jeszcze, że stwierdzenie to jest bezpośrednią konsekwencją założenia o prawostronnym charakterze transformaty Fouriera $X_+(\omega)$.

Należy jeszcze sprawdzić, czy funkcja $x_+(z)$ jest analityczna w półpłaszczyźnie otwartej, tzn. dla $\sigma = \infty$. Wykorzystamy w tym celu nierówność Schwarz'a - podnosimy do kwadratu obie strony nierówności (iv)

$$|x_+(z)|^2 \leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |X_+(\omega)| e^{-\omega\sigma} d\omega \right]^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |X_+(\omega)|^2 d\omega \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-2\omega\sigma} d\omega = \frac{E}{4\pi\sigma}$$

gdzie $E < \infty$ jest skończoną energią sygnału $x_+(t)$. Stwierdzamy, że dla $\sigma \rightarrow \infty$ $|x_+(z)| \rightarrow 0$, a więc ostatecznie sygnał $x_+(z)$ jest analityczny w otwartej górnej półpłaszczyźnie zespolonej.

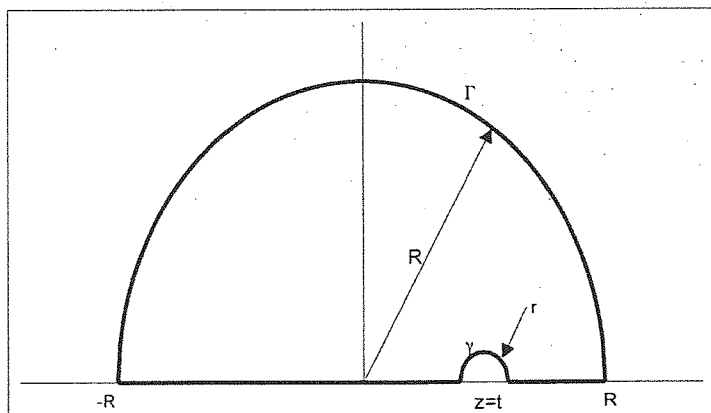
Dla sygnału analitycznego obowiązuje wzór całkowy Cauchy'ego pozwalający wyznaczyć wartość sygnału analitycznego w wewnętrznym punkcie obszaru za pomocą wartości tego sygnału na brzegu C tego obszaru

$$x_+(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{x_+(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Rozważmy ustaloną chwilę $z = t \in \mathcal{R}$. Krzywą C dobieramy w sposób pokazany na rysunku 3.1.

Obszar ograniczony krzywą C leży w górnej półpłaszczyźnie zespolonej, punkt $z = t \in \mathcal{R}$ jest punktem zewnętrznym tego obszaru. Korzystamy ze wzoru całkowego Cauchy'ego

$$x_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-R}^{t-\epsilon} \frac{x_+(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{x_+(\xi)}{\xi - t} d\xi + \frac{1}{2\pi j} \int_{t+\epsilon}^R \frac{x_+(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma \frac{x_+(\xi)}{\xi - t} d\xi$$



Rys. 3.1. Ilustracja wzoru całkowego Cauchy'ego dla sygnału analitycznego

Znajdziemy wartość graniczną powyższych całek, gdy zarówno $r \rightarrow 0$, jak i $R \rightarrow \infty$. Wcześniej udowodniliśmy, że $|x_+(\sigma)| \rightarrow 0$ na brzegu górnej półpłaszczyzny $\sigma = \infty$, co na mocy lematu Jordana pozwala stwierdzić, że

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{x_+(\xi)}{\xi - t} d\xi = 0$$

Po podstawieniu $\xi = re^{j\varphi}$ otrzymujemy w dalszym ciągu

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{x_+(\xi)}{\xi - t} d\xi \right\} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} x_+(t + re^{j\varphi}) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} x_+(t) d\varphi = \frac{1}{2} x_+(t) \end{aligned}$$

W efekcie końcowym otrzymujemy zależność

$$x_+(t) = \frac{1}{\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_+(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (v)$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\Re\{x_+(t)\} = x(t)$$

$$\Im\{x_+(t)\} = \hat{x}(t)$$

przy czym $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ jest sygnałem o dwustronnej transformacie Fouriera. Podstawiając do związku (v) rozkład $x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$ możemy stwierdzić, że część rzeczywista sygnału analitycznego jest transformatą Hilberta jego części urojonej

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

W teorii sygnałów powyższe zależności wykorzystuje się w niejako odwrotny sposób - jeżeli z sygnału oryginalnego $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ z dwustronną transformatą Fouriera chcemy utworzyć sygnał $x_+(t) \Leftrightarrow X_+(\omega)$ z transformatą Fouriera jednostronną, to należy właśnie przyjąć, że $x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$. ■

3.3. Sygnały wąskopasmowe

9. Wykorzystując pojęcie sygnału analitycznego udowodnić, że sygnał wąskopasmowy $x(t)$ można przedstawić jako złożenie sygnałów dolnopasmowych $x_c(t)$ oraz $x_s(t)$

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t \quad (i)$$

Przez sygnał wąskopasmowy rozumiemy sygnał pasmowy, którego szerokość widma W jest znacznie mniejsza od częstotliwości środkowej ω_0 , $W/\omega_0 \ll 1$; z tego powodu sygnały wąskopasmowe są nazywane niekiedy sygnałami quasi-monochromatycznymi.

Wyprowadzić zależności określające sygnały składowe $x_c(t)$ i $x_s(t)$ w funkcji sygnałów $x(t)$ i $\hat{x}(t)$ oraz zależności określające transformaty Fouriera składowych $x_c(t)$ i $x_s(t)$. ●

Transformatę Fouriera sygnału analitycznego skojarzonego z sygnałem wąskopasmowym $x(t)$ możemy zapisać w postaci

$$X_+(\omega) = U(\omega - \omega_0)$$

równoważną w dziedzinie czasu zapisowi

$$x_+(t) = u(t)e^{j\omega_0 t}$$

gdzie ω_0 jest pewną arbitralnie wybraną częstotliwością odniesienia, a widmo $U(\omega)$ jest dolnopasmowe. Zauważmy, że w ogólnym przypadku widmo $U(\omega)$ nie cechuje się symetrią hermitowską określoną jako $U(-\omega) = U^*(\omega)$ (właściwość (2.5) przekształcenia Fouriera), chociażby dlatego, że pasmo W niekończennie zostało podzielone częstotliwością odniesienia ω_0 na jednakowe części, a jeżeli nawet, to i tak widmo $X_+(\omega)$ jest na ogół niesymetryczne.

Symetria hermitowska widma sygnału jest warunkiem koniecznym i dostatecznym tego, aby sam sygnał przyjmował wartości rzeczywiste. Tym samym musimy przyjąć, że dolnopasmowy sygnał $u(t)$ przyjmuje wartości zespolone, zatem można wyróżnić w nim część rzeczywistą oraz część zespoloną (nazwijmy je odpowiednio $x_c(t)$ oraz $x_s(t)$)

$$u(t) = x_c(t) + jx_s(t)$$

Sygnał analityczny przyjmuje wobec tego postać

$$x_+(t) = [x_c(t) + jx_s(t)]e^{j\omega_0 t}$$

Biorąc pod uwagę zależność $x(t) = \Re\{x_+(t)\}$, otrzymujemy poszukiwany związek

$$x(t) = x_c(t)\cos\omega_0 t - x_s(t)\sin\omega_0 t \quad (i)$$

wyrażający sygnał wąskopasmowy $x(t)$ za pomocą dwóch składowych dolnopasmowych - $x_c(t)$ nazywanej synfazową oraz $x_s(t)$ nazywanej kwadraturową.

Przechodzimy do wyznaczenia zależności pozwalających na bezpośrednie wyznaczenie obydwóch składowych $x_c(t)$ oraz $x_s(t)$. Ponieważ

$$x_+(t) = [x_c(t) + jx_s(t)]e^{j\omega_0 t}$$

a więc również

$$x_c(t) + jx_s(t) = x_+(t)e^{-j\omega_0 t} = [x(t) + j\hat{x}(t)]e^{-j\omega_0 t}$$

Wydzielając część rzeczywistą i urojoną otrzymujemy

$$\begin{aligned} x_c(t) &= x(t)\cos\omega_0 t + \hat{x}(t)\sin\omega_0 t \\ x_s(t) &= \hat{x}(t)\cos\omega_0 t - x(t)\sin\omega_0 t \end{aligned} \quad (ii)$$

Powyższe dwa związki pozwalają wyznaczyć składowe dolnopasmowe $x_c(t)$ oraz $x_s(t)$ w oparciu o znajomość sygnału wąskopasmowego $x(t)$ oraz jego transformaty Hilberta $\hat{x}(t)$.

Bardziej pogłębione jest rozpatrzenie transformat Fouriera obydwóch składowych $x_c(t)$ oraz $x_s(t)$

$$x_c(t) + jx_s(t) = x_+(t)e^{-j\omega_0 t}$$

$$X_c(\omega) + jX_s(\omega) = X_+(\omega + \omega_0) = 2\mathcal{A}(\omega + \omega_0)X(\omega + \omega_0)$$

Korzystając z właściwości (2.15) przekształcenia Fouriera, otrzymujemy związki dla widma $X_c(\omega)$ składowej synfazowej oraz widma $X_s(\omega)$ składowej kwadraturowej

$$X_c(\omega) = \mathcal{A}(\omega + \omega_0)X(\omega + \omega_0) + \mathcal{A}^*(-\omega + \omega_0)X^*(-\omega + \omega_0)$$

$$X_s(\omega) = j\mathcal{A}^*(-\omega + \omega_0)X^*(-\omega + \omega_0) - j\mathcal{A}(\omega + \omega_0)X(\omega + \omega_0)$$

Po prostych przekształceniach znajdujemy

$$X_c(\omega) = \begin{cases} X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0), & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_0 \end{cases} \quad (iii)$$

oraz

$$X_s(\omega) = \begin{cases} -j[X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)], & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & |\omega| \geq \omega_0 \end{cases} \quad (iv)$$

Zauważmy, że widmo składowej kwadraturowej zanika, gdy widmo sygnału wąskopasmowego jest symetryczne względem prostej $\omega = \omega_0$, $X(\omega - \omega_0) = X(\omega + \omega_0)$. ■

10. Wykorzystując pojęcie sygnału analitycznego, uzasadnić, że obwiednia $e(t)$ sygnału wąskopasmowego $x(t)$ może być określona zależnością

$$e_x(t) = |x_+(t)| = \sqrt{[x(t)]^2 + [\hat{x}(t)]^2} \quad (i)$$

Rozważania rozpoczynamy od zbadania obwiedni sygnału $x(t) = v(t)\cos\omega_0 t$.

Wyznaczyć obwiednię sygnału $x(t) = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t$ przy założeniu, że sygnał $x(t)$ może być traktowany jako wąskopasmowy, tzn. $\omega_0 = (\omega_2 + \omega_1)/2 \gg W = \omega_2 - \omega_1$. ●

Rozważmy najpierw sygnał $x(t) = v(t) \cos \omega_0 t$; niech sygnał $v(t)$ będzie sygnałem dolnopasmowym, $V(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > \Omega$, $\Omega \ll \omega_0$. W oczywisty sposób obwiednia tego sygnału wynosi $e(t) = |v(t)|$. Utwórzmy teraz dla sygnału $x(t)$ skojarzony z nim sygnał analityczny $x_+(t)$

$$x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

Korzystając z twierdzenia Bedrosiana (zależność (i), zadanie 7), otrzymujemy (z uwagi na przyjęty w zadaniu warunek $\Omega \ll \omega_0$ założenia twierdzenia Bedrosiana są spełnione)

$$\hat{x}(t) = H\{v(t) \cos \omega_0 t\} = v(t) \sin \omega_0 t$$

Sygnał analityczny $x_+(t)$ skojarzony z sygnałem $x(t)$ jest równy

$$x_+(t) = v(t) \cos \omega_0 t + jv(t) \sin \omega_0 t = v(t) e^{j\omega_0 t}$$

Ponieważ w rozważanym przypadku

$$e(t) = |v(t)| = |x_+(t)| e(t) = |v(t)| = |x_+(t)|$$

możemy przyjąć, że obwiednia sygnału jest wyznaczona przez wartość bezwzględną skojarzonego z nim sygnału analitycznego, a więc formalnie

$$e(t) = |x_+(t)| = \sqrt{[x(t)]^2 + [\hat{x}(t)]^2}$$

W celu dalszego potwierdzenia tego spostrzeżenia wyznaczmy obwiednię sygnału wąskopasmowego przedstawionego jako złożenie składowej synfazowej oraz kwadraturowej (zależność (i), zadanie 9)

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$$

Wyrażenie to możemy zapisać w nieco zmodyfikowanej postaci

$$x(t) = |x_+(t)| = \sqrt{[x_c(t)]^2 + [\hat{x}_s(t)]^2} \left\{ \frac{x_c(t)}{\sqrt{[x_c(t)]^2 + [\hat{x}_s(t)]^2}} \cos \omega_0 t - \frac{x_s(t)}{\sqrt{[x_c(t)]^2 + [\hat{x}_s(t)]^2}} \sin \omega_0 t \right\}$$

W dalszym ciągu przyjmujemy, że

$$\frac{x_c(t)}{\sqrt{[x_c(t)]^2 + [\hat{x}_s(t)]^2}} = \cos \theta(t)$$

$$\frac{x_s(t)}{\sqrt{[x_c(t)]^2 + [\hat{x}_s(t)]^2}} = \sin \theta(t)$$

przy czym kąt $\theta(t)$ jest wyznaczony przez składową synfazową $x_c(t)$ oraz kwadraturową $x_s(t)$. Otrzymujemy więc

$$x(t) = e(t) [\cos \omega_0 t \cos \theta(t) - \sin \omega_0 t \sin \theta(t)]$$

przy czym

$$e(t) = \sqrt{[x_c(t)]^2 + [\hat{x}_s(t)]^2}$$

Oczywiście

$$x(t) = e(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$$

możemy więc przyjąć, że sygnał $e(t) = \sqrt{[x_c(t)]^2 + [\hat{x}_s(t)]^2}$ jest obwiednią sygnału wąskopasmowego. Z drugiej strony, jeżeli

$$x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$$

to na mocy twierdzenia Bedrosiana (zależność (i), zadanie 7)

$$\hat{x}(t) = x_c(t) \sin \omega_0 t + x_s(t) \cos \omega_0 t$$

Wartość bezwzględna odpowiedniego sygnału analitycznego wynosi

$$|x_+(t)| = e(t) = \sqrt{[x_c(t)]^2 + [\hat{x}_s(t)]^2}$$

co dodatkowo przekonuje nas o słuszności dowodzonego związku.

Przechodzimy do wyznaczenia obwiedni sygnału wąskopasmowego $x(t) = a \cos \omega_1 t + b \cos \omega_2 t$. Sygnał kwadraturowy jest równy $\hat{x}(t) = a \sin \omega_1 t + b \sin \omega_2 t$, a więc zgodnie ze wzorem (i) mamy

$$e^2(t) = [x(t)]^2 + [\hat{x}(t)]^2 = a^2 + b^2 + 2ab [\cos \omega_2 t \cos \omega_1 t + \sin \omega_2 t \sin \omega_1 t]$$

$$e(t) = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\omega_2 - \omega_1)t}$$

Obwiednia jest sygnałem wolnozmiennym, ponieważ zgodnie z założeniem częstotliwości ω_2 oraz ω_1 niewiele różnią się od siebie. ■

11. Sygnał $x(t) = v(t) \cos \omega_0 t$ jest podawany na wejście filtru pasmowoprzestupowego o odpowiedzi impulsowej $h(t)$. Stosując dolnopasmową reprezentację (zależność (i), zadanie 9) odpowiedzi impulsowej $h(t)$ ⁶

$$h(t) = 2h_c(t) \cos \omega_0 t - 2h_s(t) \sin \omega_0 t$$

udowodnić, że sygnał wyjściowy filtru jest dany zależnością

$$y(t) = [h_c(t) * v(t)] \cos \omega_0 t - [h_s(t) * v(t)] \sin \omega_0 t$$

Obliczenia prowadzimy w dziedzinie czasu. Sygnał wyjściowy filtru jest równy splotowi odpowiedzi impulsowej $h(t)$ oraz sygnału wejściowego $x(t) = v(t) \cos \omega_0 t$

$$y(t) = h(t) * [v(t) \cos \omega_0 t] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) v(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau) d\tau$$

6) Współczynnik liczbowy "2" został wprowadzony do reprezentacji dolnopasmowej w celu uproszczenia dalszych rozważań.

Rozpisujemy wyrażenie podcałkowe, korzystając z dolnopasmowej reprezentacji odpowiedzi impulsowej

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} [h_c(\tau) \cos \omega_0 \tau] [v(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau)] d\tau - \\ &- 2 \int_{-\infty}^{\infty} [h_s(\tau) \sin \omega_0 \tau] [v(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau)] d\tau \end{aligned}$$

Korzystamy z tożsamości trygonometrycznych

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} h_c(\tau) v(t - \tau) [1 + \cos 2\omega_0 \tau] d\tau + \\ &+ \sin \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} h_c(\tau) v(t - \tau) \sin 2\omega_0 \tau d\tau - \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} h_s(\tau) v(t - \tau) \sin 2\omega_0 \tau d\tau - \\ &- \sin \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} h_s(\tau) v(t - \tau) [1 - \cos 2\omega_0 \tau] d\tau \end{aligned}$$

W powyższym wyrażeniu występują całki typu

$$\int_{-\infty}^{\infty} [h_c(\tau) \cos 2\omega_0 \tau] v(t - \tau) d\tau = [h_c(t) \cos 2\omega_0 t] * v(t)$$

Wartość ich jest równa zero, gdyż odpowiadają one iloczynowi rozłącznych widm - sygnał $v(t)$ jest dolnopasmowy, sygnał $h_c(t) \cos \omega_0 t$ jest wąskopasmowy, o widmie skupionym wokół częstotliwości $2\omega_0$. Uwzględniając te spostrzeżenia, otrzymujemy ostatecznie

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} h_c(\tau) v(t - \tau) d\tau - \sin \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} h_s(\tau) v(t - \tau) d\tau \\ y(t) &= [h_c(t) * v(t)] \cos \omega_0 t - [h_s(t) * v(t)] \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Ostatnia zależność stanowi dolnopasmową reprezentację sygnału wyjściowego filtru i sugeruje, że środkopasmową filtrację sygnału z modulacją amplitudy

$v(t)\cos\omega_0 t$ można zastąpić złożeniem dolnopasmowej filtracji sygnału modulującego $v(t)$ oraz modulacji amplitudy z wykorzystaniem sygnału wyjściowego filtru. ■

12. Sygnał dwuwstęgowej modulacji amplitudy (*Double SideBand* – DSB) jest określony jako $\varphi(t) = x(t)\cos\omega_0 t$, przy czym $x(t)$ jest sygnałem modulującym, zazwyczaj dolnopasmowym, a ω_0 – częstotliwością nośną. Zgodnie z właściwością (2.12) przekształcenia Fouriera transformata Fouriera sygnału DSB wynosi $\Phi(\omega) = \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$. Wadą modulacji DSB jest podwojenie szerokości pasma przesyłanego sygnału, a przecież nie jest to konieczne, bowiem wstęga dolna sygnału DSB jest zwierciadlanym odbiciem wstęgi górnej. Wykorzystując pojęcie sygnału analitycznego udowodnić, że sygnał modulacji jednowstęgowej z wykorzystaniem wstęgi górnej (*Single SideBand* – SSB) wyraża się zależnością

$$\varphi(t) = x(t)\cos\omega_0 t - \hat{x}(t)\sin\omega_0 t \quad (i)$$

Wyznaczyć przebieg obwiedni sygnału modulacji jednowstęgowej. ●

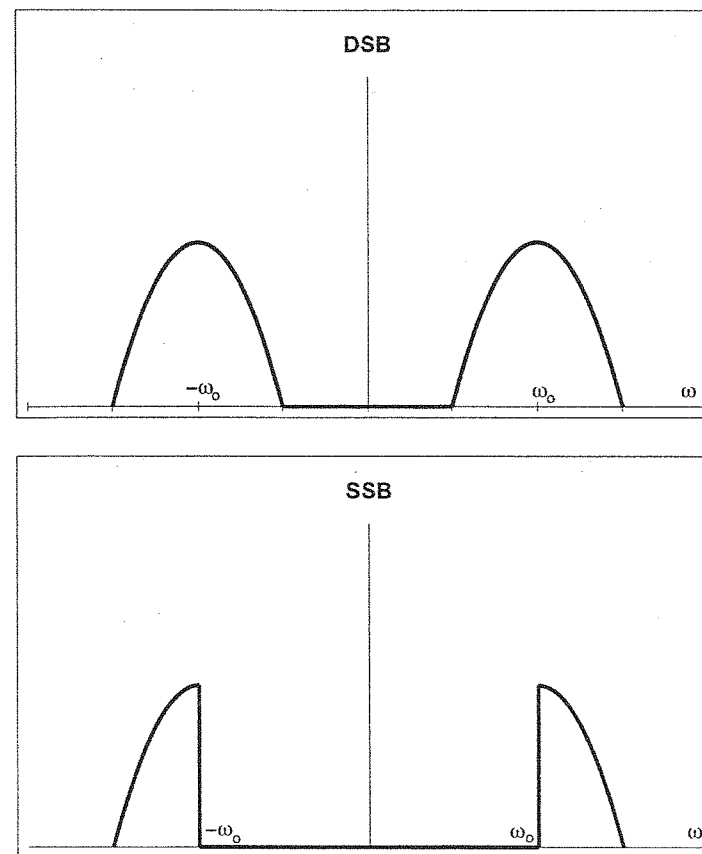
Stosując pojęcie sygnału analitycznego, możemy zapisać widmo sygnału modulacji jednowstęgowej w postaci

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2} X_+(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X_+^*(-\omega - \omega_0)$$

Konstruując widmo $\Phi(\omega)$ sygnału modulacji jednowstęgowej, należy pamiętać o tym, że sygnał $\varphi(t) \Leftrightarrow \Phi(\omega)$ jest rzeczywisty, a więc jego widmo powinno spełniać warunek (2.5) symetrii hermitowskiej $\Phi(\omega) = \Phi^*(-\omega)$ - i tak jest w istocie.

Korzystając z podstawowych właściwości przekształcenia Fouriera, wyznaczamy odwrotną transformatę $\varphi(t) \Leftrightarrow \Phi(\omega)$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} x_+(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} x_+^*(t) e^{-j\omega_0 t} = \Re\{x_+(t) e^{j\omega_0 t}\}$$



Rys. 3.2. Widma sygnałów modulacji amplitudy dwuwstęgowej DSB oraz jednowstęgowej SSB

Pamiętając, że $x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$ otrzymujemy ostatecznie czasową postać sygnału jednowstęgowej modulacji amplitudy (z wykorzystaniem górnej wstęgi)

$$\varphi(t) = \Re\{[x(t) + j\hat{x}(t)] [\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t]\} = x(t)\cos\omega_0 t - \hat{x}(t)\sin\omega_0 t$$

W podobny sposób można pokazać, że postać czasowa sygnału jednowstęgowej modulacji amplitudy z wykorzystaniem wstęgi dolnej jest równa

$$\varphi(t) = x(t)\cos\omega_0 t + \hat{x}(t)\sin\omega_0 t$$

Obwiednia sygnału jest równa modułowi skojarzonego z nim sygnału analitycznego (zależność (i), zadanie 11) - tworzymy więc sygnał analityczny odpowiadający sygnałowi modulacji jednowstęgowej (i)

$$\begin{aligned}\varphi_+(t) &= \varphi(t) + j\hat{\varphi}(t) = \\ &= [x(t) \cos \omega_0 t + \hat{x}(t) \sin \omega_0 t] + jH\{x(t) \cos \omega_0 t + \hat{x}(t) \sin \omega_0 t\}\end{aligned}$$

Twierdzenie Bedrosiana (zależność (i), zadanie 7) pozwala na dalsze przekształcenie

$$\varphi_+(t) = [x(t) \cos \omega_0 t + \hat{x}(t) \sin \omega_0 t] + j[x(t) \sin \omega_0 t - \hat{x}(t) \cos \omega_0 t]$$

Korzystając z zależności określającej obwiednię sygnału $e(t) = |\varphi_+(t)|$ oraz wykonując proste przekształcenia trygonometryczne stwierdzamy, że

$$e_\varphi(t) = \sqrt{[x(t)]^2 + [\hat{x}(t)]^2}$$

Obwiednia sygnału modulacji jednowstęgowej nie jest proporcjonalna do samego sygnału modulującego, co komplikuje procedurę demodulacji tego sygnału. ■

13. Sygnał analityczny $x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$ skojarzony z sygnałem $x(t)$ można zapisać w postaci wykładniczej

$$x_+(t) = e(t)e^{j\Gamma(t)}$$

gdzie $e(t) = |x_+(t)|$ jest obwiednią sygnału $x(t)$, a $\Gamma(t)$ jego kątem fazowym.

Można udowodnić, że również sygnał

$$\ln x_+(t) = \ln e(t) + j\Gamma(t) \quad (i)$$

jest sygnałem analitycznym. Wykorzystując zależność (i) udowodnić, że spełniony jest związek

$$x(t) = e(t) \cosh\{\ln e(t)\} \quad (ii)$$

pozwalający określać chwilowe wartości sygnału $x(t)$ poprzez wartości jego obwiedni $e(t)$. ●

Zgodnie z założeniem sygnał $\ln x_+(t)$ jest analityczny, a więc jego część urojona $\Gamma(t)$ jest transformatą Hilberta części rzeczywistej $\ln e(t)$

$$\Gamma(t) = H\{\ln e(t)\} \quad (iii)$$

Z drugiej strony wiadomo, że $x(t) = \Re\{x_+(t)\} = e(t)\cos\Gamma(t)$. Biorąc pod uwagę zależność (iii), otrzymujemy poszukiwany związek. ■

LITERATURA

- [1] R. Bracewell: *Przekształcenie Fouriera i jego zastosowania*. Warszawa WNT, 1968
- [2] L.E. Franks: *Teoria sygnałów*. Warszawa PWN, 1975
- [3] B.P. Lathi: *Teoria sygnałów oraz układów telekomunikacyjnych*. Warszawa PWN, 1970
- [4] N. Morrison: *Introduction to Fourier Analysis*. New York John Wiley and Sons, 1994
- [5] E. Ozimek: *Podstawy teoretyczne analizy widmowej sygnałów*. Warszawa PWN, 1985
- [6] A. Papoulis: *The Fourier Integral and Its Applications*. New York McGraw-Hill, 1962
- [7] A. Papoulis: *Signal Analysis*. New York McGraw-Hill, 1977
- [8] J. Sobkowski: *Częstotliwościowa analiza sygnałów*. Warszawa MON, 1975
- [9] J. Szabatin: *Podstawy teorii sygnałów*. Warszawa WKiŁ, 1982, 1990
- [10] A. Wojnar: *Teoria sygnałów*. Warszawa WNiT, 1980

