

SPIS TREŚCI

PRZEDMOWA

SPIS OZNACZEŃ

SPIS SKRÓTÓW

I WSTĘP TEORETYCZNY ORAZ TEMATY ZADAŃ

1. MODULACJE CIĄGŁE HARMONICZNEGO SYGNAŁU NOŚNEGO

- 1.1. MODULACJE AMPLITUDOWE
 - 1.1.1. WSTĘP TEORETYCZNY
 - 1.1.2. TEMATY ZADAŃ
- 1.2. MODULACJE KĄTA FAZOWEGO
 - 1.2.1. WSTĘP TEORETYCZNY
 - 1.2.2. TEMATY ZADAŃ

2. SZUMY W UKŁADACH MODULACJI CIĄGŁYCH

- 2.1. WSTĘP TEORETYCZNY
- 2.2. TEMATY ZADAŃ

3. MODULACJE IMPULSOWEGO SYGNAŁU NOŚNEGO

- 3.1. WSTĘP TEORETYCZNY
- 3.2. TEMATY ZADAŃ

II ROZWIĄZANIA I WSKAZÓWKI

4. ROZWIĄZANIA I WSKAZÓWKI

- 4.1. MODULACJE CIĄGŁE HARMONICZNEGO SYGNAŁU NOŚNEGO
 - 4.1.1. MODULACJE AMPLITUDOWE
 - 4.1.2. MODULACJE KĄTA FAZOWEGO
- 4.2. SZUMY W UKŁADACH MODULACJI CIĄGŁYCH
- 4.3. MODULACJE IMPULSOWEGO SYGNAŁU NOŚNEGO

LITERATURA

DODATEK A – FUNKCJE BESSELA PIERWSZEGO RODZAJU

DODATEK B – KRYTERIUM AMPLITUDOWE

DODATEK C – KRYTERIUM MOCOWE

PRZEDMOWA

Zbiór zadań z rozwiązaniami dotyczących przede wszystkim modulacji harmonicznego sygnału nośnego powstał w ramach wykładu i ćwiczeń audytoryjnych „Modulacja i detekcja”. Zajęcia te od szeregu lat prowadzone są dla studentów III roku kierunku „elektronika i telekomunikacja” na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki Akademii Górniczo-Hutniczej.

Zbiór zadań składa się z dwóch głównych części. W pierwszej części znajdują się niezbędne definicje i twierdzenia, a po nich zadania ze wskazówkami ułatwiającymi ich rozwiązanie. Ta część skryptu składa się z trzech rozdziałów. W rozdziale 1 przedstawiono podstawy teoretyczne oraz zadania dotyczące modulacji ciągłych harmonicznego sygnału nośnego. W ramach tego rozdziału w podrozdziale 1.1 zaproponowano zadania odnoszące się do modulacji amplitudowych jednowstęgowych (SSB-SC, SSB-LC), dwuwstęgowych (AM, DSB-SC) oraz modulacji amplitudowych z częściowo wytłumioną wstęgą boczną (VSB-SC). W podrozdziale 1.2 zamieszczono zadania dotyczące modulacji fazy (PM) oraz modulacji częstotliwości (FM). Rozdział 2 zawiera zadania dotyczące szumów w układach modulacji ciągłych. W zadaniach analizowany jest wpływ addytywnego białego szumu gaussowskiego (AWGN) na sygnał użyteczny w przypadku różnych sposobów detekcji sygnałów zmodulowanych. W rozdziale 3 znalazły się zadania dotyczące modulacji impulsowego sygnału nośnego. Zamieszczone w rozdziale zadania odnoszą się do twierdzenia o próbkowaniu oraz do wpływu szumów na sygnał modulacji impulsowej PAM.

W drugiej części skryptu zamieszczono rozwiązania oraz wskazówki do wszystkich zadań zaproponowanych w części pierwszej.

Skrypt zawiera również wykaz literatury polskojęzycznej, zarówno podstawowej jak i uzupełniającej, opisującej szczegółowo od strony teoretycznej prezentowane w zbiorze zadań zagadnienia. Zamieszczone zostały również dodatki zawierające materiał pomocny w rozwiązywaniu zaproponowanych zadań.

Autorzy zbioru pragną wyrazić podziękowanie Krzysztofowi Stanuli, naszemu studentowi, za opracowanie części rozwiązań.

SPIS OZNACZEŃ

a_m	—	amplituda harmonicznego sygnału modulującego [V];
A_0	—	amplituda sygnału nośnego [V];
B	—	szerokość pasma (sygnału, filtru etc.) [Hz];
$c(t)$	—	sygnał nośny;
C_x	—	rozdzielczość pozioma oscyloskopu;
C_y	—	rozdzielczość pionowa oscyloskopu;
E_x	—	energia sygnału $x(t)$;
$e(t)$	—	obwiednia sygnału;
f	—	częstotliwość [Hz];
f_m	—	częstotliwość harmonicznego sygnału modulującego [Hz];
$f_{\max}$	—	maksymalna częstotliwość widma sygnału modulującego [Hz];
f_0	—	częstotliwość sygnału nośnego [Hz];
$f(x)$	—	funkcja gęstości prawdopodobieństwa pierwszego rzędu;
$F\{\}$	—	transformata Fouriera;
$F^{-1}\{\}$	—	odwrotna transformata Fouriera;
G	—	zysk modulacyjny;
g	—	odniesiony (do szerokości pasma) zysk modulacyjny;
$H(\omega)$	—	transmitancja filtru;
$H\{\}$	—	transformata Hilberta;
i	—	indeks – sygnał wejściowy;
$i(t)$	—	sygnał prądowy [A];
j	—	jednostka urojona, $j^2 = -1$;
k	—	stała modulatora amplitudy [1/V];
k_{PM}	—	stała modulatora PM [rad/V];
k_{FM}	—	stała modulatora FM [rad/Vs] [Hz/V];
m	—	współczynnik głębokości modulacji napięciowego sygnału zmodulowanego amplitudowo;
m_i	—	współczynnik głębokości modulacji prądowego sygnału zmodulowanego amplitudowo;
$n(t)$	—	szum; wąskopasmowy szum wyjściowy filtru przeddetekcyjnego;
$n_I(t)$	—	składowa synfazowa szumu wąskopasmowego;
$n_o(t)$	—	szum wyjściowy detektora;
$n_Q(t)$	—	składowa kwadraturowa szumu wąskopasmowego;

N_i	—	moc szumu wejściowego odbiornika [W];
N_o	—	moc szumu wyjściowego odbiornika [W];
N_x	—	moc szumu w paśmie sygnału modulującego [W];
o	—	indeks – sygnał wyjściowy;
P_B	—	moc wstęp bocznych [W];
P	—	moc sygnału zmodulowanego [W];
P_N	—	moc składowej nośnej w sygnale zmodulowanym [W];
P_x	—	moc sygnału modulującego [W];
$S_n(\omega)$	—	widmowa gęstość mocy wąskopasmowego szumu AWGN [W/Hz];
$S_I(\omega)$	—	widmowa gęstość mocy składowej synfazowej wąskopasmowego szumu AWGN [W/Hz];
$S_Q(\omega)$	—	widmowa gęstość mocy składowej kwadraturowej wąskopasmowego szumu AWGN [W/Hz];
T	—	okres sygnału harmonicznego;
Q	—	dobroć obwodu rezonansowego;
$u(t)$	—	sygnał napięciowy [V];
$x(t)$	—	sygnał modulujący;
$\hat{x}(t)$	—	sygnał w kwadraturze;
$x_{\max}$	—	maksymalna wartość sygnału modulującego;
$ x _{\max}$	—	maksymalna wartość modułu sygnału modulującego;
γ_i	—	wejściowy odstęp sygnał-szum;
γ_o	—	wyjściowy odstęp sygnał-szum;
$\Delta\Theta$	—	dewiacja fazy [rad];
Δf	—	dewiacja częstotliwości [Hz];
$\Delta\omega$	—	dewiacja częstości [rad/s];
$\varphi(t)$	—	sygnał zmodulowany;
$\Phi(\omega)$	—	widmo sygnału zmodulowanego;
$\psi(t)$	—	sygnał wyjściowy układu detektora;
$\Psi(\omega)$	—	widmo sygnału wyjściowego układu detektora;
κ	—	współczynnik poszerzenia pasma;
ρ	—	współczynnik redukcji szumów w systemie z układami preemfazy i deemfazy;
η	—	widmowa gęstość mocy szumu AWGN [W/Hz];
μ	—	współczynnik sprawności energetycznej;
τ	—	czas trwania impulsu;

ξ	—	odstrojenie bezwzględne obwodu rezonansowego;
ω_m	—	częstość harmonicznego sygnału modulującego [rad/s];
$\omega_{\max}$	—	maksymalna częstość widma sygnału modulującego [rad/s];
ω_N	—	częstość Nyquista [rad/s];
$\Pr\{\cdot\}$	—	prawdopodobieństwo;
$\operatorname{Re}\{\cdot\}$	—	część rzeczywista;
$\cdot$	—	symbol modulacji, pochodna sygnału;
$\operatorname{sgn}(\cdot)$	—	znak wyrażenia;

SPIS SKRÓTÓW

AM	—	dwuwstęgowa modulacja amplitudy z sygnałem nośnym (ang. <i>Amplitude Modulation</i>);
DSB-LC	—	dwuwstęgowa modulacja amplitudy z sygnałem nośnym (ang. <i>Double SideBand – Large Carrier</i>);
DSB-SC	—	dwuwstęgowa modulacja amplitudy bez sygnału nośnego (ang. <i>Double SideBand – Suppressed Carrier</i>);
SSB-LC	—	jednowstęgowa modulacja amplitudy z sygnałem nośnym (ang. <i>Single SideBand – Large Carrier</i>);
SSB-SC	—	jednowstęgowa modulacja amplitudy bez sygnału nośnego (ang. <i>Single SideBand – Suppressed Carrier</i>);
VSF-SC	—	modulacja amplitudy z częściowo wytłumioną wstęgą boczną (bez sygnału nośnego) (ang. <i>Vestigial SideBand – Suppressed Carrier</i>);
VSF-LC	—	modulacja amplitudy z częściowo wytłumioną wstęgą boczną (z sygnałem nośnym) (ang. <i>Vestigial SideBand – Large Carrier</i>);
FM	—	modulacja częstotliwości (ang. <i>Frequency Modulation</i>);
PM	—	modulacja fazy (ang. <i>Phase Modulation</i>);
ΦM	—	modulacja kąta fazowego (ang. <i>Phase Angle Modulation</i>);
NBPM	—	wąskopasmowa modulacja fazy (ang. <i>Narrowband Phase Modulation</i>);
WBFM	—	szerokopasmowa modulacja częstotliwości (ang. <i>Wideband Frequency Modulation</i>);
PAM-IS	—	próbkowanie chwilowe (ang. <i>Pulse Amplitude Modulation – Instantaneous Sampling</i>);
PAM-NS	—	próbkowanie naturalne (ang. <i>Pulse Amplitude Modulation – Natural Sampling</i>);
PFM	—	modulacja częstotliwości impulsów (ang. <i>Pulse Frequency Modulation</i>);
PDM	—	modulacja czasu trwania impulsów (ang. <i>Pulse Duration Modulation</i>);
PWM	—	modulacja czasu trwania impulsów (ang. <i>Pulse Width Modulation</i>);
PIM	—	modulacja odstępów pomiędzy impulsami (ang. <i>Pulse Interval Modulation</i>);
PPM	—	modulacja położenia impulsów (ang. <i>Pulse Position Modulation</i>);
FDP	—	filtr dolnoprzepustowy;
FPP	—	filtr pasmowoprzepustowy;

1. MODULACJE CIĄGŁE HARMONICZNEGO SYGNAŁU NOŚNEGO

Modulacja ciągła harmonicznego sygnału nośnego

Modulacja ciągła harmonicznego sygnału nośnego:

$$c(t) = A_0 \cos \omega_0 t \quad (1.1)$$

odwzorowuje analogowy (ciągły) sygnał modulujący $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ w jeden z trzech parametrów sygnału nośnego – amplitudę, częstotliwość lub odchyłkę kąta fazowego. Zakładamy, że sygnał modulujący jest sygnałem dolnopasmowym o maksymalnej częstotliwości $\omega_{\max}$. Sygnał zmodulowany oznaczamy symbolem $\varphi(t)$, gdzie „ φ ” w indeksie jest ogólnie przyjętym skrótem nazwy modulacji (w języku angielskim).

Jeżeli sygnał modulujący jest sygnałem harmonicznym, na ogół $x(t) = a_m \cos \omega_m t$, mówimy wówczas o modulacji tonowej.

1.1. MODULACJE AMPLITUDOWE

1.1.1. WSTĘP TEORETYCZNY

Dwuwstęgowa modulacja amplitudy bez sygnału nośnego (DSB-SC)

Sygnał z dwuwstęgową modulacją amplitudy bez sygnału nośnego DSB-SC (ang. *Double SideBand – Suppressed Carrier*) określamy jako:

$$\varphi_{\text{DSB-SC}}(t) = kA_0 x(t) \cos \omega_0 t \quad (1.2)$$

gdzie k jest stałą modulatora. W sygnale tym amplituda chwilowa sygnału nośnego jest uzmienniona wprost proporcjonalnie do sygnału modulującego. Obwiednia sygnału DSB-SC wynosi natomiast:

$$e_{\text{DSB-SC}}(t) = kA_0 |x(t)| \quad (1.3)$$

i jest równa sygnałowi modulującemu tylko wtedy, gdy przyjmuje on wartości dodatnie.

Jeżeli sygnał modulujący przyjmuje wartości ujemne, w sygnale zmodulowanym obserwujemy przemodulowanie (odwrócenie fazy sygnału nośnego) uniemożliwiające poprawną detekcję niekoherentną (poprzez detekcję obwiedni).

Transformata Fouriera sygnału DSB-SC jest równa:

$$\Phi_{\text{DSB-SC}}(\omega) = \frac{1}{2} kA_0 [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \quad (1.4)$$

Widmo sygnału DSB-SC jest widmem sygnału modulującego przesuniętym do częstotliwości nośnej, zawierającym wstęgę dolną i górną. Szerokość widma sygnału DSB-SC wynosi $W_{\text{DSB-SC}} = 2\omega_{\max}$, a współczynnik poszerzenia pasma $\kappa_{\text{DSB-SC}} = W_{\text{DSB-SC}} / \omega_{\max} = 2$.

Odtworzenie sygnału modulującego z sygnału DSB-SC jest realizowane poprzez detekcję synchroniczną (koherentną) sprowadzającą się w istocie rzeczy do przemnożenia w odbiorniku sygnału zmodulowanego przez odtworzony (w odbiorniku) synchroniczny sygnał nośny oraz niezbędnej filtracji składowych pozapasmowych:

$$\varphi_{\text{DSB-SC}}(t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}kA_0 x(t) + \frac{1}{2}kA_0 x(t)\cos 2\omega_0 t \rightarrow \text{FDP} \rightarrow \frac{1}{2}kA_0 x(t). \quad (1.5)$$

Dwuwstęgowa modulacja amplitudy z sygnałem nośnym (AM)

Niekorzystnych efektów przemodulowania w sygnale DSB-SC można uniknąć, gdy do sygnału zmodulowanego DSB-SC wprowadzamy sygnał nośny:

$$\varphi_{\text{DSB-SC}}(t) + A_0 \cos\omega_0 t = kA_0 x(t)\cos\omega_0 t + A_0 \cos\omega_0 t = A_0 [1 + kx(t)]\cos\omega_0 t \quad (1.6)$$

nazywany powszechnie sygnałem modulacji amplitudy AM (ang. *Amplitude Modulation*)

$$\varphi_{\text{AM}}(t) = A_0 [1 + kx(t)]\cos\omega_0 t \quad (1.7)$$

lub niekiedy – bardziej precyzyjnie – sygnałem z dwuwstęgową modulacją amplitudy z sygnałem nośnym DSB-LC (ang. *Double SideBand – Large Carrier*).

Efekt przemodulowania nie pojawia się, gdy spełniony jest warunek $1 + kx(t) \geq 0$. Jeżeli sygnał modulujący zmienia się w przedziale $[-x_{\max}, +x_{\max}]$, to wielkość $m = k|x|_{\max}$ nazywamy współczynnikiem głębokości modulacji; $m \leq 1$ gwarantuje brak przemodulowania sygnału AM.

Transformata Fouriera sygnału AM jest równa:

$$\Phi_{\text{AM}}(\omega) = \pi A_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{1}{2}kA_0 [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \quad (1.8)$$

i zawiera dwa składniki – prążek odpowiadający niemodulowanemu sygnałowi nośnemu oraz widmo sygnału modulującego przesunięte do częstotliwości nośnej. Szerokość widma sygnału AM wynosi $W_{\text{AM}} = 2\omega_{\max}$, a współczynnik poszerzenia pasma $\kappa_{\text{AM}} = W_{\text{AM}}/\omega_{\max} = 2$.

Sygnał tonowej modulacji AM, gdy $x(t) = a_m \cos\omega_m t$, przybiera postać:

$$\varphi_{\text{AM}}(t) = A_0 (1 + ka_m \cos\omega_m t)\cos\omega_0 t = A_0 (1 + m \cos\omega_m t)\cos\omega_0 t \quad (1.9)$$

gdzie $m = ka_m$ określa współczynnik głębokości modulacji; efekt przemodulowania nie występuje dla $m \leq 1$.

Sygnał AM można demodulować w sposób niekoherentny, a więc bez konieczności odtworzenia w odbiorniku synchronicznego sygnału nośnego. Demodulacja niekoherentna polega na detekcji obwiedni sygnału AM $e_{\text{AM}}(t) = A_0 [1 + kx(t)]$, zawierającej niezniekształcony sygnał modulujący (przemodulowanie nie występuje), a następnie usunięciu składowej stałej.

Jednowstęgowa modulacja amplitudy bez sygnału nośnego (SSB-SC)

Wadą modulacji dwuwstęgowej (DSB-SC oraz AM) jest dwukrotne poszerzenie pasma zajmowanego przez sygnał zmodulowany, a przecież ta sama informacja jest przenoszona we wstędze dolnej jak i górnej. Rozszerzenia zajmowanego pasma

można uniknąć stosując jednowstęgową modulację amplitudy bez sygnału nośnego SSB-SC (ang. *Single SideBand – Suppressed Carrier*):

$$\varphi_{\text{SSB-SC}^\pm}(t) = kA_0 x(t) \cos \omega_0 t \mp kA_0 \hat{x}(t) \sin \omega_0 t \quad (1.10)$$

gdzie $\hat{x}(t)$ jest sygnałem w kwadraturze do sygnału modulującego $x(t)$. Składowe częstotliwościowe sygnału w kwadraturze mają niezmienną amplitudę, natomiast są przesunięte w fazie o stały kąt równy $-\pi/2$.

Szerokość widma sygnału SSB-SC wynosi $W_{\text{SSB-SC}^\pm} = \omega_{\max}$, a współczynnik poszerzenia pasma:

$$\kappa_{\text{SSB-SC}^\pm} = W_{\text{SSB-SC}^\pm} / \omega_{\max} = 1$$

Odtworzenie sygnału modulującego z sygnału SSB-SC jest realizowane poprzez detekcję synchroniczną (koherentną) – przemnożenie w odbiorniku sygnału zmodulowanego przez odtworzony (w odbiorniku) synchroniczny sygnał nośny oraz niezbędną filtrację składowych pozapasmowych:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{SSB-SC}}(t) \cos \omega_0 t &= \frac{1}{2} kA_0 x(t) + \frac{1}{2} kA_0 x(t) \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{2} kA_0 x(t) \sin 2\omega_0 t \rightarrow \\ &\rightarrow \text{FDP} \rightarrow \frac{1}{2} kA_0 x(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Wadą sygnału SSB-SC są trudności jego wytwarzania związane z koniecznością syntezy albo filtru o bardzo stromo opadającym zboczach (wycinającego wybraną wstęgę boczną), albo filtru Hilberta (przesuwnika fazowego).

Podobnie jak w przypadku modulacji dwuwstęgowych DSB-SC oraz AM (DSB-LC), w celu zachowania szerokości pasma oraz zapewnienia demodulacji niekoherentnej, można utworzyć sygnał jednowstęgowy z sygnałem nośnym SSB-LC (oznaczany też SSB-AM):

$$\varphi_{\text{SSB-AM}^\pm}(t) = A_0 [1 + kx(t)] \cos \omega_0 t \mp kA_0 \hat{x}(t) \sin \omega_0 t. \quad (1.12)$$

Obwiednia sygnału SSB-AM jest równa:

$$e_{\text{SSB-AM}}(t) = A_0 \sqrt{[1 + kx(t)]^2 + [k\hat{x}(t)]^2} \approx A_0 [1 + kx(t)] \sqrt{1 + \left[\frac{k\hat{x}(t)}{1 + kx(t)} \right]^2} \quad (1.13)$$

i jest proporcjonalna do sygnału modulującego tylko dla bardzo płytkiej modulacji, gdy $kx(t) \approx k\hat{x}(t) \approx 0$, a więc gdy sprawność energetyczna modulacji jest równie niska.

Modulacja amplitudy z częściowo wytłumioną wstęgą boczną (VSB)

Współczynnik poszerzenia zajmowanego pasma dla modulacji dwuwstęgowych jest równy $\kappa_{\text{DSB-SC}} = W_{\text{DSB-SC}} / \omega_{\max} = 2$, natomiast dla jednowstęgowych $\kappa_{\text{SSB}} = W_{\text{SSB}} / \omega_{\max} = 1$.

Pośrednią wartość współczynnika poszerzenia pasma $1 < \kappa < 2$ realizuje modulacja amplitudy z częściowo wytłumioną wstęgą boczną (bez sygnału nośnego) VSB-SC (ang. *Vestigial SideBand – Suppressed Carrier*). Podstawową zaletą tej modulacji – w porównaniu do modulacji jednowstęgowej SSB-SC – jest łatwość tworzenia sygnału zmodulowanego metodą filtrową.

Jeżeli zbocze filtru $H(\omega)$ kształtującego sygnał VSB-SC z sygnału DSB-SC cechuje się „symetrią dopełniającą” (zbocze Nyquista) opisaną warunkiem:

$$H(\omega + \omega_0) + H(\omega - \omega_0) = 1, \quad |\omega| \leq \omega_0 \quad (1.14)$$

to sygnał modulacji VSB-SC jest określony wtedy zależnością:

$$\varphi_{\text{VSB-SC}^\pm}(t) = kA_0 x(t) \cos \omega_0 t \mp kA_0 x_Q(t) \sin \omega_0 t. \quad (1.15)$$

Filtr o zboczu Nyquista zapewnia częściowe i płynne wytłumienie jednej ze wstępnych, a więc w efekcie $1 < \kappa_{\text{VSB-SC}} < 2$.

Składowa kwadraturowa $x_Q(t)$ sygnału VSB-SC powstaje w wyniku filtracji sygnału modulującego $x(t)$ w filtrze o transmitancji danej zależnością:

$$H_Q(\omega) = -j[H(\omega + \omega_0) - H(\omega - \omega_0)], \quad |\omega| \leq \omega_0 \quad (1.16)$$

z czego wynika, że sygnał VSB-SC można również generować z wykorzystaniem filtracji dolnoprzepustowej.

Sygnał VSB-SC można demodulować koherentnie, a po zapewnieniu odpowiednio wysokiego poziomu sygnału nośnego (sygnał VSB-LC lub VSB-AM):

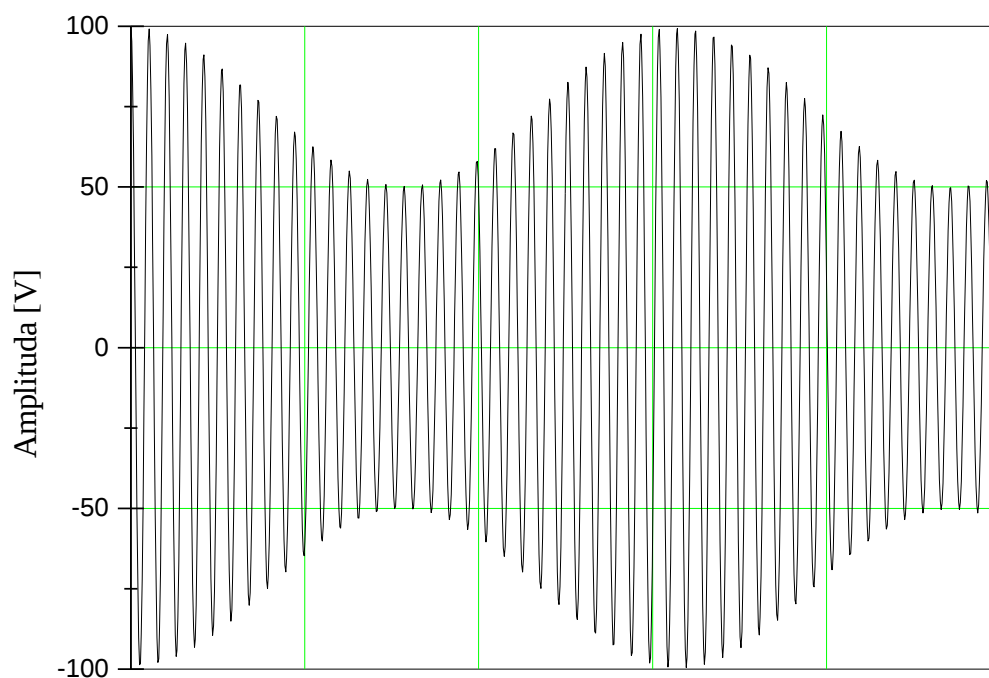
$$\varphi_{\text{VSB-AM}^\pm}(t) = A_0 [1 + kx(t) \cos \omega_0 t] \mp kA_0 x_Q(t) \sin \omega_0 t \quad (1.17)$$

również niekoherentnie.

1.1.2. TEMATY ZADAŃ

Zadanie 1.1.1

Sygnal zmodulowany AM przedstawiono na rysunku 1.1. Znajdź głębokość modulacji. Jaka powinna być amplituda fali nośnej, aby współczynnik głębokości modulacji zmniejszył się o 10% (zakładając, że wartość międzyszczytowa w górnej/dolnej obwiedni nie może ulec zmianie)?



Rysunek 1.1

Zadanie 1.1.2

Analizie poddano dwa sygnały zmodulowane amplitudowo, opisane wzorami:

- $\varphi_1(t) = (2 + E_1 \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$,
- $\varphi_2(t) = E_2 \cos \omega_m t \cos \omega_0 t$.

Należy wyznaczyć takie wartości wielkości E_1 i E_2 aby uzyskać maksymalną dopuszczalną modulację w przypadku sygnału $\varphi_1(t)$. Wyznaczone wartości powinny także zapewniać równość mocy obydwu sygnałów.

Zadanie 1.1.3

Sygnal mowy jest sygnałem modulującym w systemie AM. Wiedząc, że częstotliwość nośna sygnału wynosi $f_0 = 100$ kHz, wyznacz zakres częstotliwości, w jakich pracuje nadajnik. Należy przyjąć, że sygnał mowy zawiera się w paśmie 300÷3400 Hz.

Zadanie 1.1.4

Mając dany napięciowy sygnał AM postaci $u_{AM}(t) = A_0(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$, wyprowadź wzór na współczynnik głębokości modulacji m , $m \leq 1$, w zależności od:

- wartości maksymalnej $U_{\max}$ i minimalnej $U_{\min}$ obwiedni sygnału $u_{AM}(t)$,
- wartości współczynnika zawartości harmonicznych $h = \sqrt{P_B/P_{AM}}$, gdzie P_B – moc wstęp bocznych, P_{AM} – moc całkowita sygnału zmodulowanego AM.

Zadanie 1.1.5

Porównaj współczynniki głębokości modulacji wynikające ze wzorów uzyskanych w zadaniu 1.1.4 dla przypadku sygnału zmodulowanego amplitudowo AM danego wzorem $u_{AM}(t) = A_0(1 + 0,3 \cos \omega_m t + 0,4 \cos 2\omega_m t) \cos \omega_0 t$.

Zadanie 1.1.6

Zależność $\varphi_{AM}(t) = (A + 2B \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$ opisuje sygnał zmodulowany amplitudowo AM. Wyznacz stosunek wielkości A/B występujących w podanym wzorze wiedząc, że współczynnik sprawności energetycznej wynosi $\mu_{AM} = 1/4$.

Zadanie 1.1.7

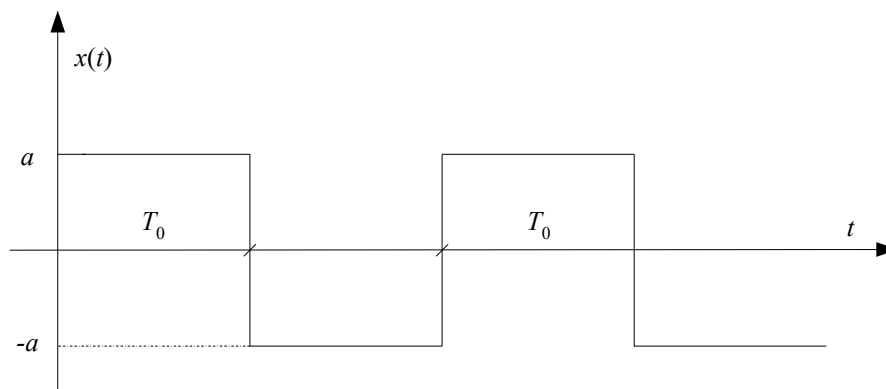
Znajdź wyrażenie opisujące sygnał SSB-SC⁻, jeżeli sygnał modulujący ma postać $x(t) = \cos 2 \cdot 10^3 t + \cos 5 \cdot 10^3 t$, a pulsacja sygnału nośnego jest równa $\omega_0 = 10^4$ rad/s.

Zadanie 1.1.8

Dla sygnału AM opisanego wzorem $\varphi_{AM}(t) = A_0(1 + m \cos \omega_m t + m \cos 2\omega_m t) \cos \omega_0 t$ wyznacz współczynnik głębokości modulacji m , dla którego współczynnik sprawności energetycznej μ_{AM} osiągnie wartość maksymalną przy założeniu, że nie występuje przemodulowanie.

Zadanie 1.1.9

Sygnałem modulującym w systemie AM jest sygnał przedstawiony na rysunku 1.2. Stała modulatora AM wynosi $k = 1 \text{ V}^{-1}$. Stwierdzono, że moc wstęp bocznych jest 2,25 razy większa od mocy sygnału nośnego. Czy w sygnale zmodulowanym AM występuje przemodulowanie? Narysuj przebieg sygnału AM dla przypadku, gdy częstotliwość nośna $f_0 = 1/T_0$.



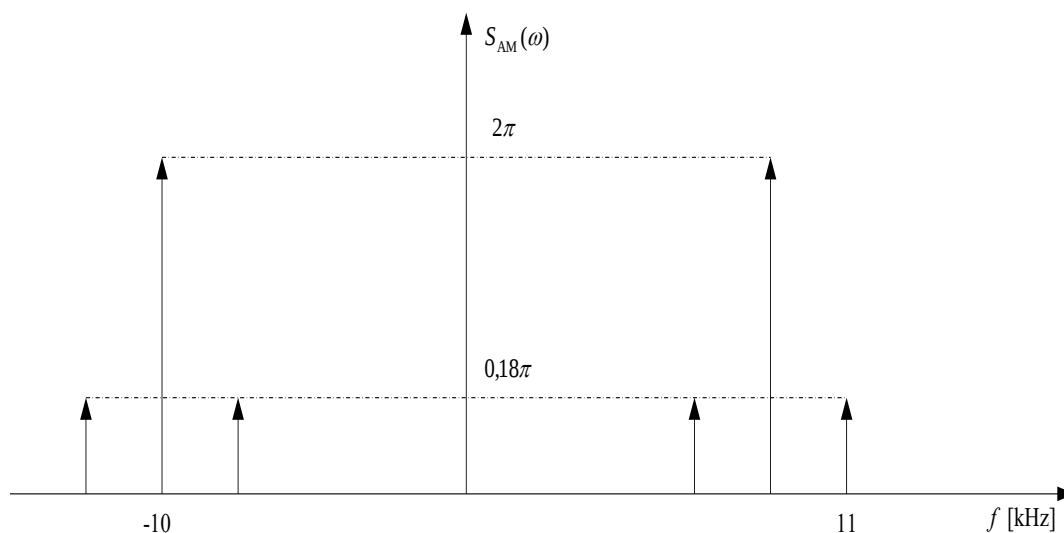
Rysunek 1.2

Zadanie 1.1.10

Moc sygnału zmodulowanego DSB-SC wynosi $P_{\text{DSB-SC}} = 4 \text{ W}$, moc harmonicznego sygnału modulującego $P_x = 2 \text{ W}$, stała modulatora $k = 1/4 \text{ V}^{-1}$. Odtwórz postać czasową sygnału zmodulowanego wiedząc, że szerokość pasma sygnału zmodulowanego wynosi $B_{\text{DSB-SC}} = 10 \text{ kHz}$, częstotliwość sygnału nośnego $f_0 = 100 \text{ kHz}$. Narysuj transformatę Fouriera sygnału zmodulowanego zaznaczając odpowiednie wartości na rysunku.

Zadanie 1.1.11

Widmo gęstości mocy sygnału zmodulowanego AM pokazano na rysunku 1.3:



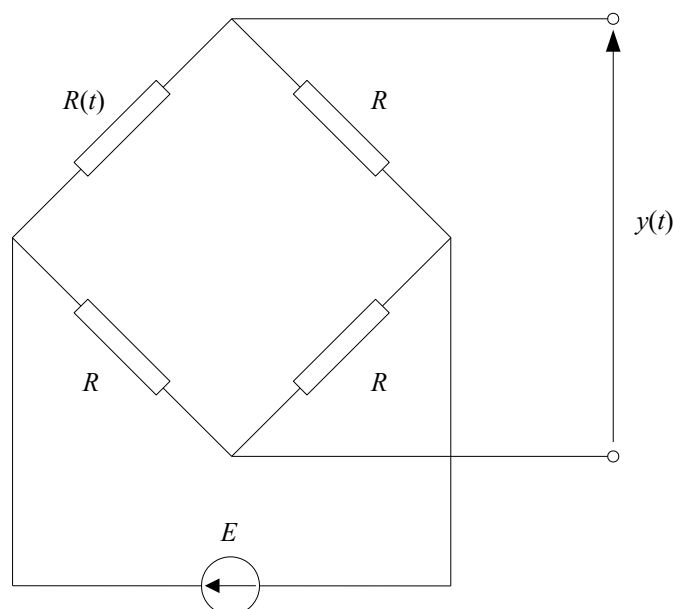
Rysunek 1.3

Analizując przedstawione widmo gęstości mocy:

- odtwórz postać czasową sygnału AM,
- oblicz moc całkowitą sygnału P_{AM} , moc wstęp bocznych P_B oraz współczynnik sprawności energetycznej μ_{AM} .

Zadanie 1.1.12

Udowodnij, że sygnał wyjściowy układu przedstawionego na rysunku 1.4 jest sygnałem modulacji DSB-SC. Zmienna rezystancja opornika $R(t)$ opisana jest zależnością $R(t) = R[1 + \alpha x(t)]$, gdzie $x(t)$ jest sygnałem modulującym, natomiast α jest pewną stałą. Zakładamy, że $|\alpha x(t)| = \alpha |x(t)| \ll 1$, $E = A_0 \cos \omega_0 t$.



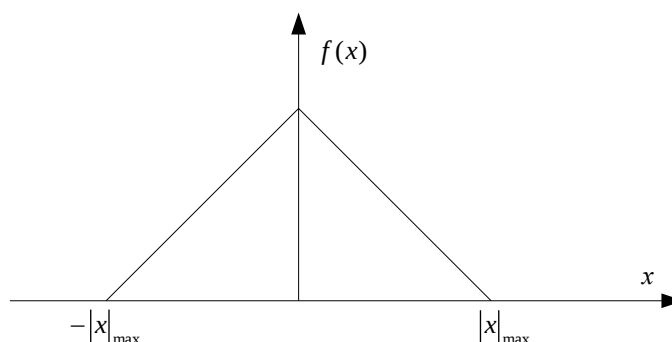
Rysunek 1.4

Zadanie 1.1.13

Nadajnik AM testowano za pomocą harmonicznego sygnału modulującego. Wykonano dwa pomiary. Stwierdzono, że:

- moc sygnału nośnego bez modulacji wynosi 3 W,
- moc sygnału zmodulowanego wynosi 4,2 W.

Przy tej samej głębokości modulacji sygnał harmoniczny zamieniono na sygnał o trójkątnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa przedstawionej na rysunku 1.5.

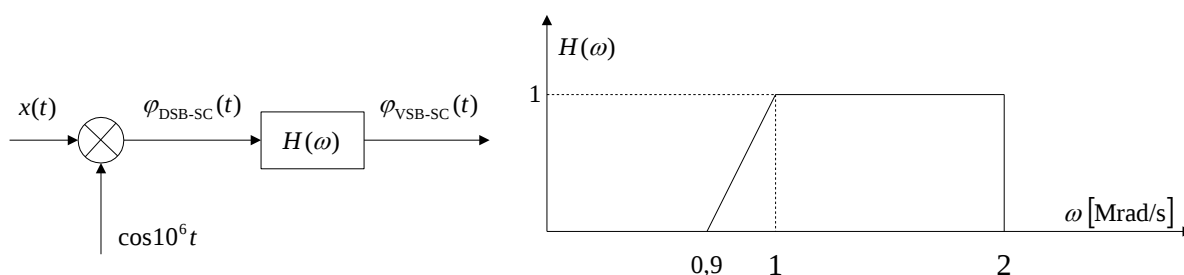


Rysunek 1.5

Wyznacz dla nowego sygnału sprawność energetyczną modulacji i porównaj ją ze sprawnością energetyczną dla harmonicznego sygnału modulującego.

Zadanie 1.1.14

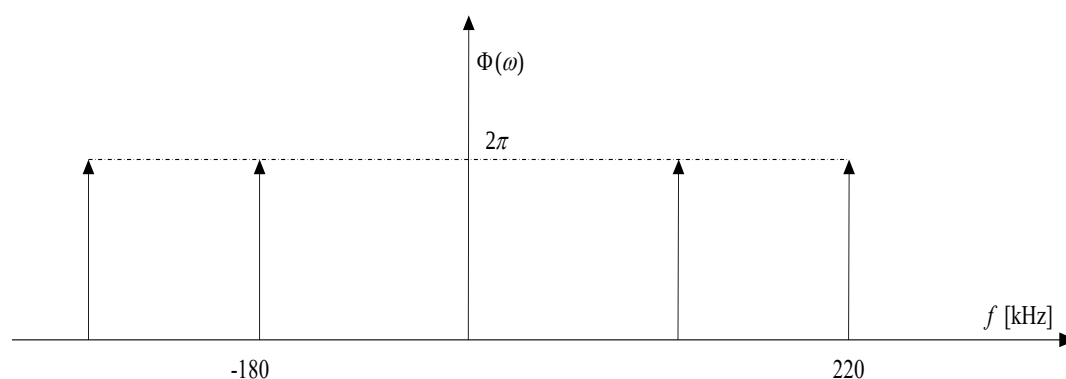
Sygnał VSB-SC (z częściowo wytłumioną wstęgą boczną) jest wytwarzany w układzie, którego schemat oraz charakterystykę filtracji $H(\omega)$ przedstawia rysunek 1.6. Znajdź wyrażenie opisujące sygnał VSB-SC, jeżeli sygnał modulujący $x(t)$ jest opisany zależnością $x(t) = 10 \sin 2 \cdot 10^4 t$.



Rysunek 1.6

Zadanie 1.1.15

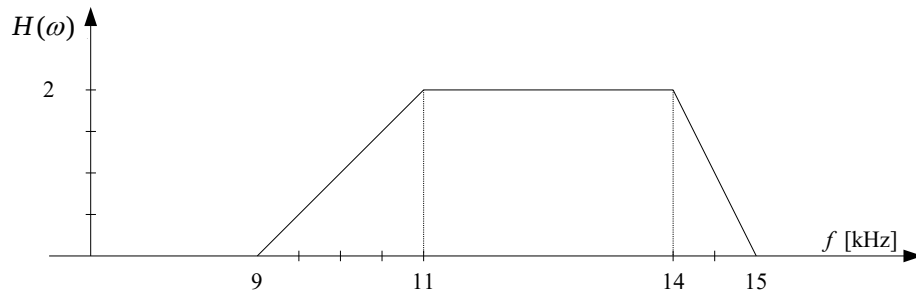
Transformata Fouriera $\Phi(\omega)$ sygnału zmodulowanego jest wykreślona na rysunku 1.7, moc sygnału modulującego $P_x = 2 \text{ W}$, stała modulatora $k = 1/4 \text{ V}^{-1}$. Odtwórz postać czasową sygnału zmodulowanego oraz wyznacz jego moc. Narysuj widmo gęstości mocy $S(\omega)$ sygnału zmodulowanego.



Rysunek 1.7

Zadanie 1.1.16

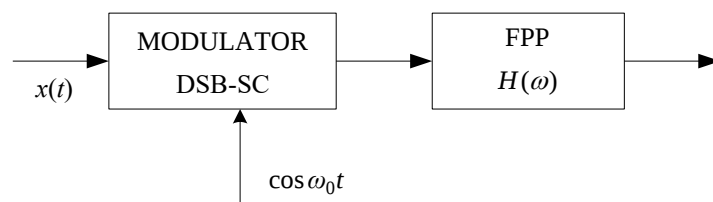
Sygnałem wejściowym filtru o transmitancji pokazanej na rysunku 1.8 jest sygnał zmodulowany DSB-SC o częstotliwości nośnej 10 kHz. Sygnał modulujący opisany jest zależnością $x(t) = \cos 2\pi \cdot 500t$. Amplituda sygnału nośnego wynosi 4 V. Narysuj widmo sygnału wyjściowego filtru i znajdź jego postać czasową. Czy sygnał wyjściowy jest nadal sygnałem DSB-SC?



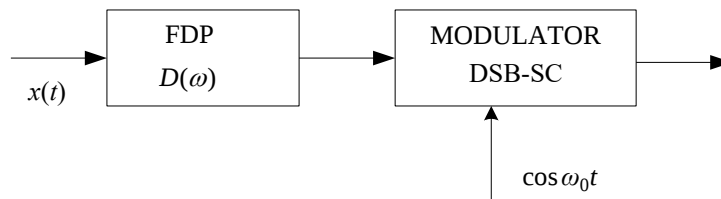
Rysunek 1.8

Zadanie 1.1.17

Rozważmy dwa systemy transmisji sygnału, przedstawione na rysunkach 1.9 i 1.10:



Rysunek 1.9



Rysunek 1.10

Zakładamy, że:

- transmitancja filtru pasmowoprzepustowego $H(\omega)$ jest osiowo symetryczna względem prostej $\omega = \omega_0$,
- szerokość widma sygnału modulującego wynosi $\omega_{\max}$, tzn. $X(\omega) = 0$ dla $|\omega| > \omega_{\max}$,
- szerokość pasma przepustowego filtru pasmowoprzepustowego wynosi $2\omega_{\max}$,
- częstota nośna sygnału jest dużo większa od szerokości pasma sygnału modulującego $\omega_0 \gg \omega_{\max}$.

Udowodnij, że przy odpowiednim doborze transmitancji filtru dolnoprzepustowego $D(\omega)$ powyższe systemy transmisji są równoważne, tzn. otrzymamy ten sam sygnał wyjściowy w obu przypadkach.

Zadanie 1.1.18

W celu zmierzenia współczynnika głębokości modulacji do płytek odchyłania pionowego oscyloskopu przyłożono sygnał zmodulowany AM natomiast do płytek odchyłania poziomego harmoniczny sygnał modulujący. Zakładamy, że $\omega_0 \gg \omega_m$, $m \leq 1$.

Polecenia:

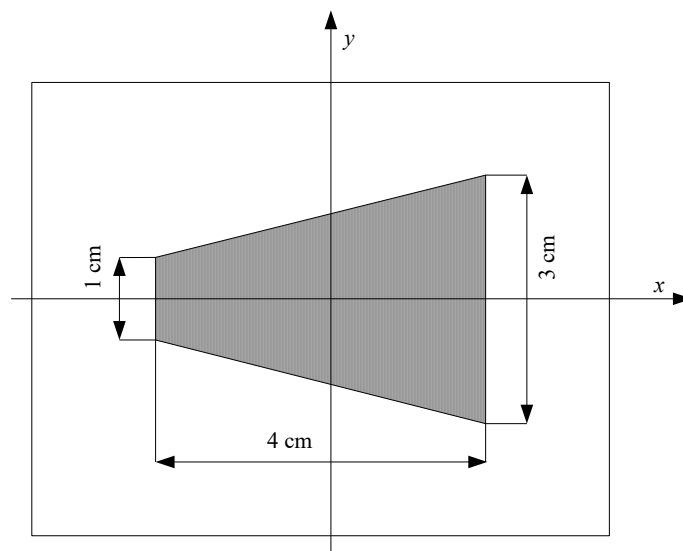
- narysuj obraz, który ukaże się na ekranie oscyloskopu,
- wyznacz współczynnik głębokości modulacji na podstawie zmierzonych rozmiarów obrazu na ekranie oscyloskopu,
- przedyskutuj przypadek $m > 1$.

Opisany w zadaniu sposób wyznaczania współczynnika głębokości modulacji AM nazywany jest metodą trapezową.

Zadanie 1.1.19

Sygnał harmoniczny o mocy $P_x = 0,5$ W jest sygnałem modulującym w modulatorze AM. W celu wyznaczenia parametrów sygnału zmodulowanego zastosowano metodę trapezową. Rysunek 1.11 pokazuje obraz, który ukazał się na ekranie oscyloskopu. Szerokość pasma sygnału zmodulowanego $B_{AM} = 10$ kHz, częstotliwość nośna $f_0 = 100$ kHz, moc sygnału zmodulowanego $P_{AM} = 2,25$ W. Analizując obraz, który ukazał się na ekranie oscyloskopu oraz biorąc pod uwagę podane parametry systemu:

- wyznacz współczynnik sprawności energetycznej,
- podaj rozdzielczość poziomą i pionową oscyloskopu,
- odtwórz postać czasową sygnału zmodulowanego AM.



Rysunek 1.11

Zadanie 1.1.20

Korzystając z metody trapezowej opisanej w zadaniu 1.1.18 zbadaj sygnał zmodulowany amplitudowo AM w przypadku, gdy przebieg odchylający w poziomie (sygnał modulujący) jest przesunięty fazowo o mały kąt φ względem obwiedni. Naszkicuj obraz, który pojawi się na ekranie oscyloskopu oraz wyznacz współczynnik

głębokości modulacji. Załóż, że sygnałem modulującym jest sygnał harmoniczny o amplitudzie a_m .

Zadanie 1.1.21

Sygnał $\varphi_{AM}(t)$ jest sygnałem tonowej modulacji AM, a sygnał $\hat{\varphi}_{AM}(t)$ jest sygnałem tonowej modulacji AM o częstotliwościach przesuniętych w fazie o $-\pi/2$. Sygnał $\varphi_{AM}(t)$ przyłożono do płytek odchylania poziomego, a sygnał $\hat{\varphi}_{AM}(t)$ do płytek odchylania pionowego oscyloskopu. Naskicuj obraz, który pojawi się na ekranie oscyloskopu. Wyjaśnij, w jaki sposób mierząc rozmiary geometryczne obrazu można wyznaczyć współczynnik głębokości modulacji m . Zakładamy, że $\omega_m \ll \omega_0$.

Opisany w zadaniu sposób wyznaczania współczynnika głębokości modulacji nazywany jest metodą pierścieniową.

Zadanie 1.1.22

Na wejściu szeregowego obwodu rezonansowego działa napięciowy sygnał AM opisany zależnością $u_{AM}(t) = (100 + 50 \cos 10^4 t) \cos 10^6 t$. Obwód jest dostrojony do częstotliwości nośnej sygnału napięciowego. Oblicz:

- dobroć obwodu rezonansowego, jeżeli wiadomo, że obwiednia sygnału prądowego $i_{AM}(t)$ jest przesunięta względem obwiedni sygnału napięciowego $u_{AM}(t)$ o $\pi/3$,
- parametry R i L obwodu rezonansowego oraz współczynnik głębokości modulacji sygnału prądowego m_i , jeżeli wiadomo, że pojemność kondensatora $C = 2 \text{ nF}$.

Zadanie 1.1.23

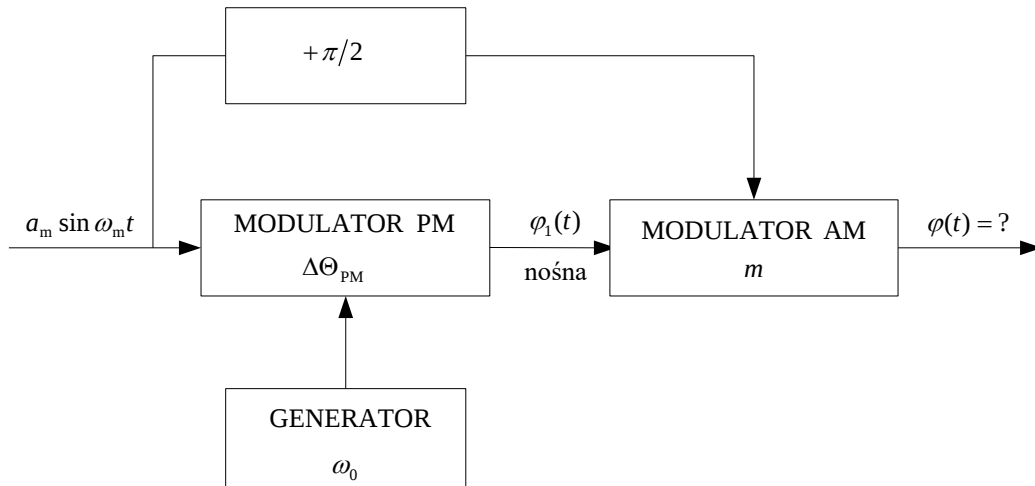
Sygnał nośny o częstotliwości $f_0 = 1 \text{ MHz}$ jest modulowany sygnałem $x(t) = a_m \cos 2\pi \cdot 10^3 t$ w systemie AM. Napięciowy sygnał zmodulowany AM został podany na szeregowy obwód rezonansowy RLC dostrojony do częstotliwości nośnej rozważanego sygnału. Oblicz dobroć obwodu rezonansowego zapewniającą stosunek amplitudy fal bocznych do amplitudy sygnału nośnego w sygnale prądowym $i_{AM}(t)$ mniejszy o 3 dB w porównaniu ze stosunkiem amplitudy fal bocznych do amplitudy sygnału nośnego w sygnale napięciowym $u_{AM}(t)$.

Zadanie 1.1.24

Mamy do dyspozycji zniekształcony sygnał nośny $c(t) = \cos^3 \omega_0 t$. W celu wytworzenia sygnału DSB-SC sygnał modulujący mnożony jest przez zniekształcony sygnał nośny. Narysuj widmo tego sygnału. W jaki sposób można otrzymać z niego sygnał DSB-SC?

Zadanie 1.1.25

Zbadaj charakter sygnału $\varphi(t)$ uzyskanego w układzie pokazanym na rysunku 1.12 przy założeniu, że wartość współczynnika głębokości modulacji m równa wartości dewiacji fazy Θ_{PM} jest bliska zeru, $m = \Delta\Theta_{PM} \approx 0$.



Rysunek 1.12

Zadanie 1.1.26

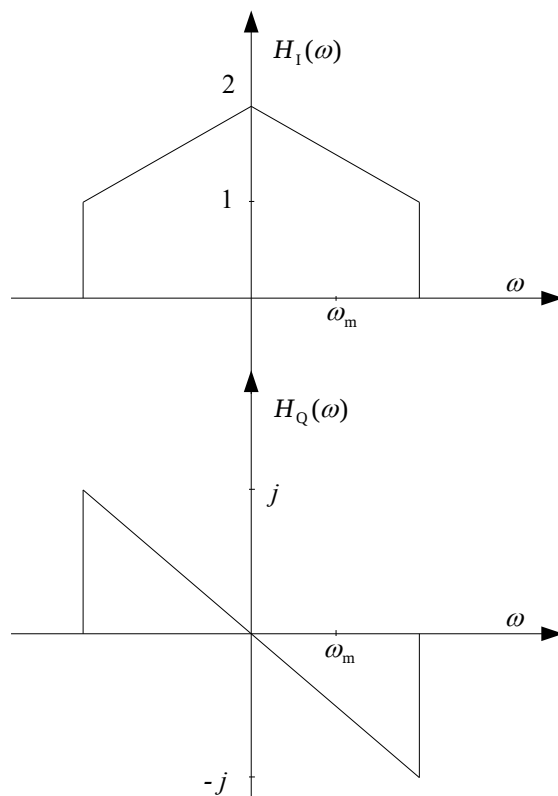
Dysponujemy filtrem pasmowoprzepustowym o częstotliwości środkowej ω_0 i szerokości pasma przepustowego $2\omega_m$. Chcemy za pomocą tego filtra zrealizować modulację SSB- LC^+ na częstotliwości nośnej ω_0 . W tym celu na wejście filtra podano sygnał o zmodulowanej amplitudzie i częstotliwości opisany wzorem:

$$\varphi(t) = A_0(1 + m \cos \omega_m t) \cos(\omega_0 t + \Delta\Theta_{FM} \sin \omega_m t)$$

Wyznacz związek pomiędzy dewiacją fazy $\Delta\Theta_{FM}$ a współczynnikiem głębokości modulacji m umożliwiający uzyskanie sygnału jednowstęgowego SSB- LC^+ .

Zadanie 1.1.27

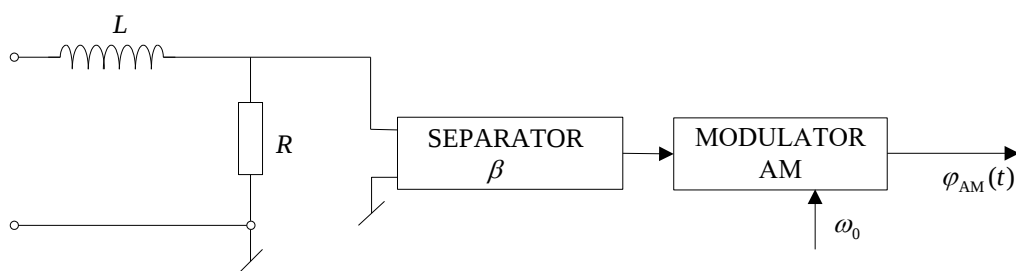
Rysunek 1.13 przedstawia transmitancję składowej synfazowej i kwadraturowej filtra pasmowego, którego sygnałem wejściowym jest nieprzemułowany sygnał AM. Rozstrzygnij, czy jest możliwe, by w sygnale wyjściowym filtra wystąpił efekt przemułowania.



Rysunek 1.13

Zadanie 1.1.28

Sygnał mowy jest sygnałem wejściowym w układzie modulacji AM przedstawionym na rysunku 1.14. Układ RL jest filtrem dolnoprzepustowym, a separator oddzielający filtr od modulatora cechuje się tłumieniem β (niezależnym od częstotliwości).

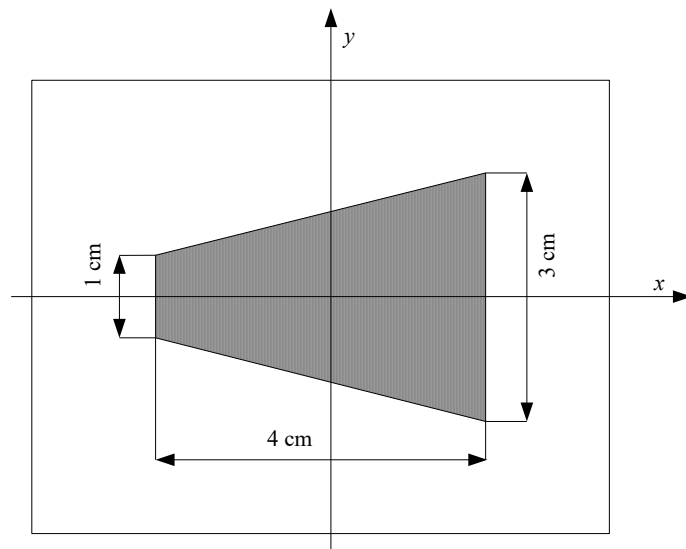


Rysunek 1.14

Stwierdzono, że sygnał mowy można traktować jako stacjonarny proces losowy o parametrach: $\bar{u} = 0$, $R_u(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$. Żądamy, żeby:

- sygnał modulujący nie zawierał częstotliwości większych od $f_{\max}$,
- nie występowało przemodulowanie.

Metodą trapezową opisaną w zadaniu 1.1.18 zbadano sam modulator. Znana jest rozdzielczość pozioma oscyloskopu $C_x = 0,25$ V/cm. Na rysunku 1.15 przedstawiono obraz, który ukazał się na ekranie oscyloskopu:



Rysunek 1.15

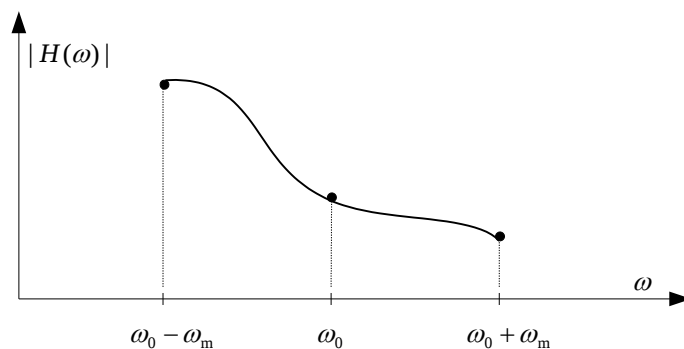
Założ, że maksymalna wartość sygnału modulującego jest 5 razy większa od jego odchylenia standardowego. Podaj związki pozwalające wyznaczyć wartości parametrów β i R/L tak, by spełnione były powyższe dwa żądania.

Wskazówka:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}, \quad a > 0, \quad b > 0$$

Zadanie 1.1.29

Sygnał modulujący opisany jest zależnością $x(t) = a_m \cos \omega_m t$. Postać czasowa sygnału modulacji jednowstęgowej z falą nośną dana jest wzorem $\varphi_{\text{SSB-LC}^\pm}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + mA_0 \cos \omega_m t \cos \omega_0 t \pm mA_0 \sin \omega_m t \sin \omega_0 t$. Sygnał zmodulowany $\varphi_{\text{SSB-LC}^\pm}(t)$ wprowadzany jest do kanału, którego charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa w przedziale $[\omega_0 - \omega_m, \omega_0 + \omega_m]$ ma opadający przebieg zobrazony na rysunku 1.16.

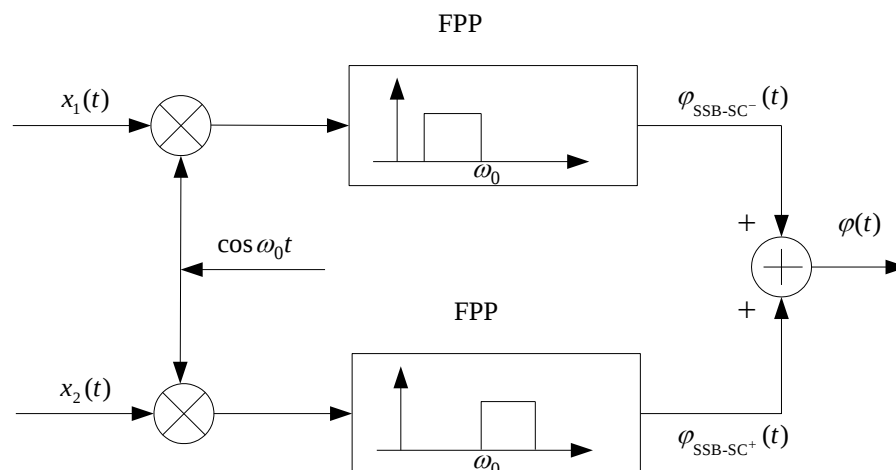


Rysunek 1.16

Na wyjściu kanału transmisyjnego chcemy uzyskać przebieg o maksymalnej wartości stosunku mocy wstęgi bocznej do mocy całego sygnału. Którą wstęgę sygnału SSB-LC należy przesyłać?

Zadanie 1.1.30

Możliwość przesyłania dwóch sygnałów na tej samej częstotliwości nośnej daje system z dwiema niezależnymi wstęgami bocznymi, którego schemat jest przedstawiony na rysunku 1.17.

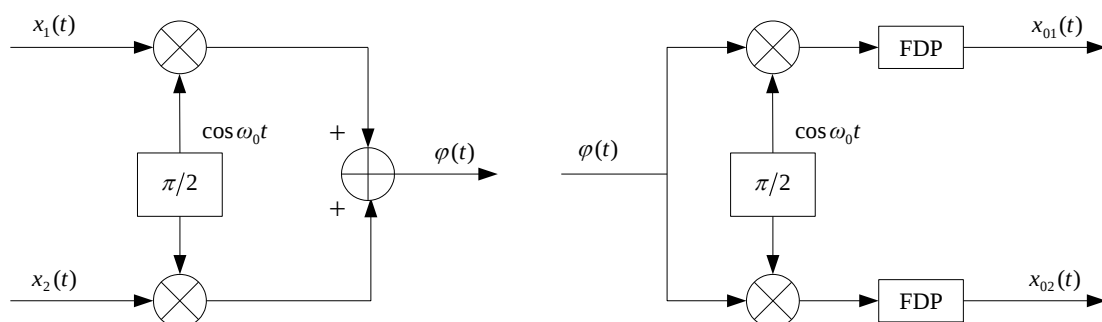


Rysunek 1.17

Znajdź postać sygnału $\varphi(t)$. Skonstruuj układ detektora odtwarzającego sygnały $x_1(t)$ i $x_2(t)$.

Zadanie 1.1.31

Wykaż, że system przedstawiony na rysunku 1.18 umożliwia przesyłanie dwóch sygnałów przy pomocy jednej częstotliwości nośnej. Przeanalizuj błędy synchronizacji.

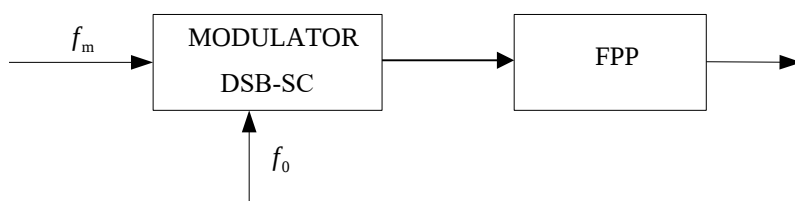


Rysunek 1.18

Zadanie 1.1.32

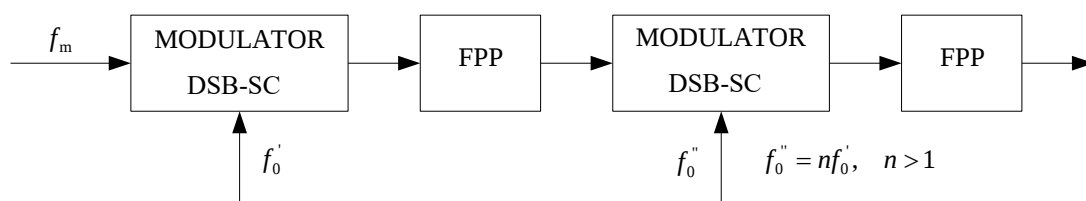
Sygnał modulujący jest sygnałem harmonicznym o częstotliwości f_m , częstotliwość sygnału nośnego wynosi f_0 . Rozważamy modulację SSB-SC⁺ realizowaną metodą

filtrów. Żądany sygnał możemy wytworzyć w układzie jednostopniowym przedstawionym na rysunku 1.19:



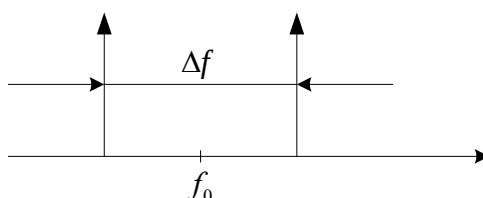
Rysunek 1.19

lub w układzie dwustopniowym pokazanym na rysunku 1.20:



Rysunek 1.20

Filtracja (budowa filtru) jest tym łatwiejsza, im większa jest względna odległość prążków bocznych (filtrowanych), wyznaczana przy pomocy zależności $r = \frac{\Delta f}{f_0}$, gdzie Δf jest odległością prążków bocznych, natomiast f_0 oznacza częstotliwość sygnału nośnego. Podane wielkości zostały graficznie przedstawione na rysunku 1.21.



Rysunek 1.21

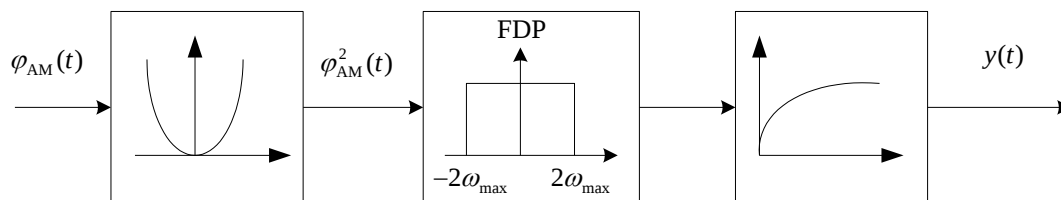
Zakładamy, że przeprowadzamy modulację w układzie dwustopniowym. W pierwszym etapie wytwarzany jest sygnał zmodulowany SSB-SC⁺ o częstotliwości sygnału nośnego f_0' . Sygnał wyjściowy tej modulacji jest sygnałem modulującym dla drugiego modulatora SSB-SC⁺ pracującego na częstotliwości nośnej $f_0'' = n f_0'$, $n > 1$. Wykorzystując pojęcie względnej odległości prążków porównaj modulację jedno- i dwustopniową pod kątem stopnia trudności budowy filtru.

Zadanie 1.1.33

Uzasadnij, wykonując odpowiednie obliczenia, że sygnał $\varphi(t) = x(t)\sin \omega_0 t + \hat{x}(t)\cos \omega_0 t$ jest sygnałem jednowstęgowym. Pokaż, którą wstęgę – górną czy dolną – przenosi sygnał $\varphi(t)$.

Zadanie 1.1.34

Wykaż, że układ pokazany na rysunku 1.22 demoduluje sygnał AM. Wykaż, że filtr dolnoprzepustowy ma częstotliwość odcięcia równą $2\omega_{\max}$, gdzie $\omega_{\max}$ jest największą częstotliwością sygnału.

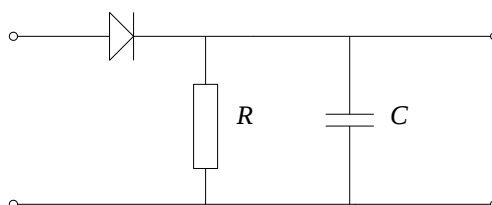


Rysunek 1.22

Wykazać, że działanie układu jest równoważne detektorowi obwiedni i w związku z tym nie jest możliwa detekcja koherentna sygnałów. Wykazać, że jeżeli pierwszy stopień układu jest prostownikiem dwupołkowym, to sygnał AM może być demodulowany bez układu pierwiastkowego na wyjściu.

Zadanie 1.1.35

Rozważamy tonową modulację AM. Znamy jej parametry: współczynnik głębokości modulacji m oraz częstotliwość ω_m sygnału modulującego, $\omega_0 \gg \omega_m$. Należy wyznaczyć wartość stałej czasowej RC detektora obwiedni pokazanego na rysunku 1.23 tak, by sygnał wyjściowy detektora obwiedni jak najwierniej odtwarzał obwiednię sygnału modulującego.



Rysunek 1.23

Zadanie 1.1.36

W detektorze synchronicznym generujemy sygnał nośny z błędem częstotliwości $\Delta\omega_0$ i błędem fazy θ . Przeprowadź obliczenia i wyznacz widmo sygnału wyjściowego detektora dla przypadku detekcji sygnału DSB-SC.

Zadanie 1.1.37

Rozważamy detekcję synchroniczną. Załóżmy, że w odbiorniku generujemy falę nośną z błędem częstotliwości $\Delta\omega_0$ i błędem fazy θ . Przeprowadź obliczenia i wyznacz widmo sygnału wyjściowego detektora dla przypadku detekcji sygnału SSB-SC⁺.

Zadanie 1.1.38

Rozważamy układ detekcji obwiedni z wprowadzaniem fali nośnej polegający na dodaniu do sygnału zmodulowanego sygnału nośnego. Zakładamy, że częstotliwość

nośna jest dokładnie zsynchronizowana, powstaje jednakże błąd fazy θ . Przeprowadź obliczenia dla systemu DSB-SC.

Zadanie 1.1.39

Rozważamy układ detekcji obwiedni z wprowadzaniem fali nośnej. Zakładamy, że częstotliwość jest dokładnie zsynchronizowana, powstaje jednakże błąd fazy. Przeprowadź obliczenia dla systemu SSB-SC.

Zadanie 1.1.40

Sygnał wąskopasmowej modulacji fazy NBPM (ang. *NarrowBand Phase Modulation*) dany jest wzorem $\phi(t) = A_0 \sin[\omega_0 t + kx(t)]$. Stosujemy detekcję synchroniczną. Wyznacz sygnał wyjściowy detektora.

1.2. MODULACJE KĄTA FAZOWEGO (ΦM)

1.2.1. WSTĘP TEORETYCZNY

Modulacje kąta fazowego (ΦM) zachowują amplitudę sygnału nośnego, wprowadzając natomiast odchyłkę kąta fazowego (od liniowego trendu $\omega_0 t$) uzależnioną od sygnału modulującego:

$$\varphi_{\Phi M}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Theta_{\Phi M}[x(t)]) \quad (1.18)$$

Jeżeli odchyłka kąta fazowego jest wprost proporcjonalna do sygnału modulującego:

$$\Theta_{PM}(t) = k_{PM} x(t) \quad (1.19)$$

mamy wówczas do czynienia z modulacją fazy PM (ang. *Phase Modulation*):

$$\varphi_{PM}(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + k_{PM} x(t)] \quad (1.20)$$

Jeżeli sygnał modulujący zmienia się w przedziale $[-x_{\max}, +x_{\max}]$, to wielkość $\Delta\Theta_{PM} = k_{PM} x_{\max}$ nazywamy dewiacją fazy; dewiacja fazy wyznacza maksymalną odchyłkę kąta fazowego od liniowego trendu $\omega_0 t$.

Modulacja fazy wywołuje również zmiany częstości chwilowej:

$$\omega_{PM}(t) = \frac{d}{dt}[\omega_0 t + \Theta_{PM}(t)] = \omega_0 + \dot{\Theta}_{PM}(t) = \omega_0 + k_{PM} \dot{x}(t) \quad (1.21)$$

Maksymalna odchyłka częstości chwilowej od częstości nośnej:

$$\Delta\omega_{PM} = k_{PM} \dot{x}_{\max} \quad (1.22)$$

jest nazywana dewiacją częstości.

W modulacji częstotliwości FM (ang. *Frequency Modulation*) obserwujemy liniowe uzależnienie częstości chwilowej od sygnału modulującego:

$$\omega_{FM}(t) = \omega_0 + k_{FM} x(t); \quad (1.23)$$

w tym przypadku dewiacja częstości jest określona jako:

$$\Delta\omega_{FM} = k_{FM} x_{\max} \quad (1.24)$$

Modulacja częstotliwości wywołuje również zmiany kąta fazowego:

$$\int_0^t (\omega_0 + k_{FM} x(\tau)) d\tau = \omega_0 t + k_{FM} \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (1.25)$$

Postać czasowa sygnału FM opisana jest zatem zależnością:

$$\varphi_{FM}(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + k_{FM} \int_0^t x(\tau) d\tau\right) \quad (1.26)$$

Podobnie jak dla modulacji fazy PM możemy określić dewiację fazy dla sygnału modulacji częstotliwości FM:

$$\Delta\Theta_{FM} = k_{FM} \left| \int x \right|_{\max} \quad (1.27)$$

Stwierdzamy zatem, że w obydwóch rodzajach modulacji – PM oraz FM – występują zarówno zmiany częstotliwości chwilowej oraz kąta fazowego. Równoczesność tych zmian powoduje, że przebiegi czasowe obydwóch rodzajów modulacji są praktycznie

nierozróżnialne (bez obserwacji przebiegów czasowych przy dodatkowych zmianach parametrów).

Nieliniowy charakter modulacji kąta fazowego powoduje, że analiza widmowa sygnałów ΦM w przypadku ogólnym jest utrudniona. Zazwyczaj posługujemy się analizą widmową sygnału modulacji tonowej ΦM :

$$\varphi_{\Phi M}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\Theta_{\Phi M} \sin \omega_m t) \quad (1.28)$$

Tabela 1 pokazuje związki pomiędzy dewiacją częstotliwości oraz dewiacją fazy dla tonowej modulacji PM oraz FM. Z uwagi na nieco odmienny dobór sygnału modulującego (przesunięcie w fazie o $\pi/2$) uzyskaliśmy identyczną postać czasową obydwóch sygnałów PM i FM oraz identyczny związek pomiędzy charakterystycznymi dewiacjami.

Tabela 1. Związki pomiędzy dewiacją fazy a dewiacją częstotliwości w tonowej modulacji PM i FM

	Modulacja PM	Modulacja FM
Sygnał modulujący	$x(t) = a_m \sin \omega_m t$	$x(t) = a_m \cos \omega_m t$
Dewiacja fazy	$\Delta\Theta_{PM} = k_{PM} a_m$	$\Delta\Theta_{FM} = k_{FM} a_m / \omega_m = \Delta\omega_{FM} / \omega_m$
Dewiacja częstotliwości	$\Delta\omega_{PM} = k_{PM} a_m \omega_m = \Delta\Theta_{PM} \omega_m$	$\Delta\omega_{FM} = k_{FM} a_m$
	$\Delta\Theta_{\Phi M} = \frac{\Delta\omega_{\Phi M}}{\omega_m}$	

Sygnał tonowej modulacji ΦM można przedstawić w postaci sumy składowych harmonicznich (skupionych wokół częstotliwości nośnej):

$$\varphi_{\Phi M}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\Theta_{\Phi M} \sin \omega_m t) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\Delta\Theta_{\Phi M}) \cos(\omega_0 + n\omega_m)t, \quad (1.29)$$

gdzie $J_n(\Delta\Theta_{\Phi M}) \in \mathcal{R}$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju n -tego rzędu. Współczynniki $J_n(\Delta\Theta_{\Phi M})$ rozwinięcia spełniają warunki:

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.30)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(x) = 1$$

$$J_{n-1}(-x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wartości współczynników funkcji Bessela $J_n(\Delta\Theta_{\Phi M})$ w zależności od dewiacji fazy $\Delta\Theta_{\Phi M}$ zamieszczone zostały w Dodatku A.

Widmo sygnału tonowej modulacji ΦM ma charakter prążkowy o częstotliwościach $\omega_0 \pm n\omega_m$ skupionych wokół częstotliwości nośnej. Szerokość widma jest teoretycznie nieskończona, ale w praktyce z uwagi na malejącą wartość współczynników rozwinięcia $J_n(\Delta\Theta_{\Phi M})$ można przyjąć, że szerokość widma jest skończona.

Szerokość widma modulacji ΦM wyznaczamy z przybliżonej reguły Carsona:

$$W_{\Phi M} \approx 2(\Delta\Theta_{\Phi M} + 1)\omega_{\max} = 2(\Delta\omega_{\Phi M} + \omega_{\max}). \quad (1.31)$$

Wzór pozwalający wyznaczyć szerokość pasma w zależności od liczby prążków istotnych ma postać:

$$W_{\Phi M} = 2N(\Delta\Theta_{\Phi M})\omega_{\max}$$

gdzie przyjmujemy, że $N(\Delta\Theta_{\Phi M})$ jest liczbą prążków istotnych.

W celu wyznaczenia liczby prążków istotnych oprócz reguły Carsona, gdzie przyjmujemy, że $N(\Delta\Theta_{\Phi M}) \approx \Delta\Theta_{\Phi M} + 1$, stosowane jest również kryterium amplitudowe oraz kryterium mocowe. Zależność liczby prążków istotnych w funkcji dewiacji fazy $N(\Delta\Theta_{\Phi M})$ przedstawiona jest dla kryterium amplitudowego oraz kryterium mocowego odpowiednio w Dodatku B oraz Dodatku C.

1.2.2. TEMATY ZADAŃ

Zadanie 1.2.1

Częstotliwość sygnału nośnego wynosi $f_0 = 200$ MHz, a jego amplituda $A_0 = 5$ V. Częstotliwość nośna modulowana jest sygnałem harmonicznym o częstotliwości $f_m = 5$ kHz. Maksymalna dewiacja częstotliwości wynosi $\Delta f_{\text{FM}} = 75$ kHz. Znajdź postać czasową sygnału zmodulowanego FM.

Zadanie 1.2.2

Zbadano trzy modulatory ΦM . Tabela 2 podaje zmierzoną szerokość pasma sygnału wyjściowego każdego z trzech modulatorów w zależności od amplitudy a_m i częstotliwości f_m harmonicznego sygnału modulującego. Na podstawie danych zawartych w tabeli 2 określ dokładniej typ modulatora: FM czy PM oraz wąskopasmowy czy szerokopasmowy.

Tabela 2. Parametry modulatorów ΦM

Modulator	a_m f_m	1 V 1 kHz	2 V 1 kHz	1 V 2 kHz
Typ 1	B	2	2	4
Typ 2	B	40	80	80
Typ 3	B	50	100	50

Zadanie 1.2.3

Sygnał zmodulowany kątowno ma postać: $\varphi_{\Phi\text{M}}(t) = 3\cos(3\pi \cdot 10^6 t + 2\sin 4\pi \cdot 10^3 t)$. Nie wiadomo, czy sygnał nośny jest modulowany częstotliwościowo czy fazowo. Wyznacz parametry fali nośnej $c(t)$ oraz sygnału modulującego $x(t)$ dla obydwu przypadków (FM, PM), wiedząc, że $k_{\text{FM}} = 10^3$ rad/Vs, a $k_{\text{PM}} = 1/2$ rad/V.

Zadanie 1.2.4

Sygnał nośny o częstotliwości $f_0 = 100$ MHz poddany jest modulacji FM sygnałem sinusoidalnym o częstotliwości $f_m = 10$ kHz przy dewiacji częstotliwości $\Delta f_{\text{FM}} = 1$ MHz. Oblicz szerokość pasma sygnału zmodulowanego B_{FM} oraz zakres częstotliwości, w jakim pracuje nadajnik. Przeprowadź podobne obliczenia dla przypadków, gdy zostaną wprowadzone następujące zmiany:

- amplituda sygnału modulującego jest zwiększona dwukrotnie,
- częstotliwość sygnału modulującego oraz jego amplituda są zwiększone dwukrotnie.

Zadanie 1.2.5

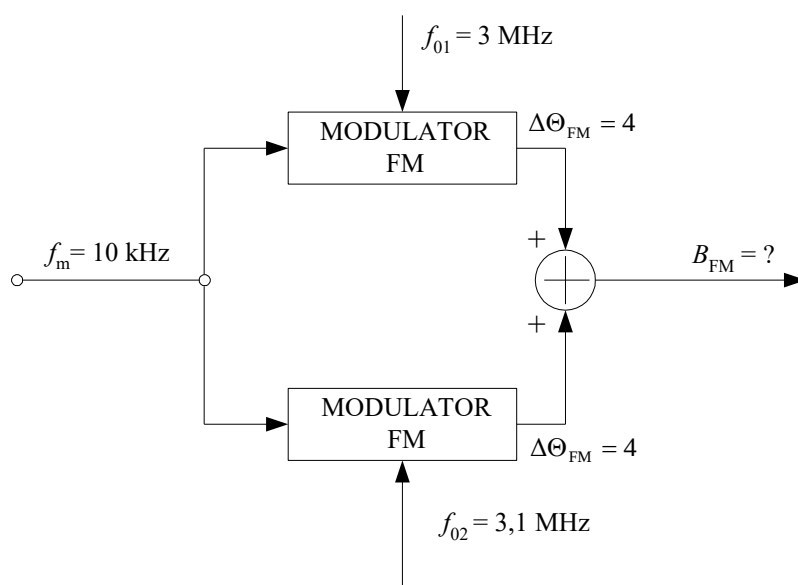
Sygnał nośny o częstotliwości $f_0 = 10$ MHz poddany jest modulacji PM sygnałem sinusoidalnym o częstotliwości $f_m = 10$ kHz i amplitudzie $a_m = 1$ V. Dewiacja fazy wynosi $\Delta\Theta_{\text{PM}} = 10$ rad. Oblicz szerokość pasma sygnału zmodulowanego PM,

dewiację częstotliwości oraz liczbę prążków istotnych. Przeprowadź podobne obliczenia dla przypadku, gdy:

- $f_m = 5 \text{ kHz}$,
- $f_m = 5 \text{ kHz}$, amplituda zwiększona dwukrotnie.

Zadanie 1.2.6

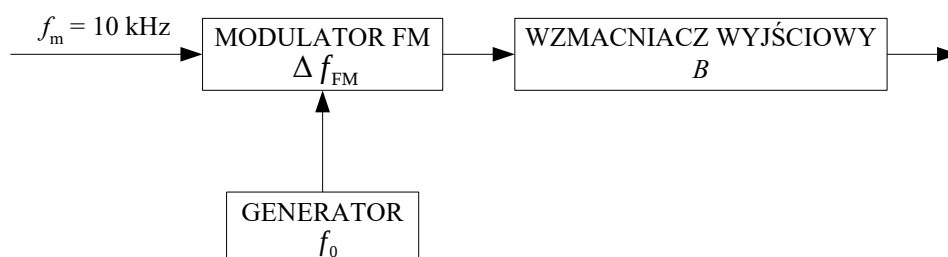
Wyznacz szerokość pasma sygnału wyjściowego układu o schemacie przedstawionym na rysunku 1.24.



Rysunek 1.24

Zadanie 1.2.7

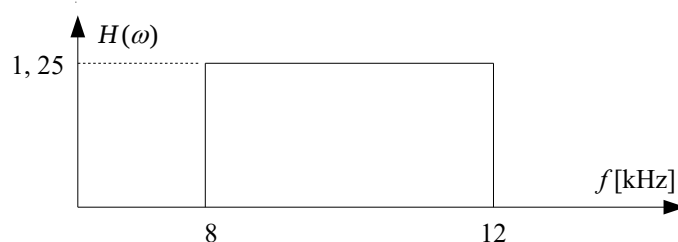
Nadajnik FM o schemacie przedstawionym na rysunku 1.25 pracuje na częstotliwości nośnej $f_0 = 1 \text{ MHz}$. Pasma wzmacniacza wyjściowego wynosi $B = 200 \text{ kHz}$ i dokładnie pokrywa pasmo zajmowane przez sygnał zmodulowany. Złe zabezpieczenie cieplne generatora spowodowało obniżenie częstotliwości nośnej o 2%. Jak należy zmienić amplitudę sygnału modulującego, aby praca układu była poprawna?



Rysunek 1.25

Zadanie 1.2.8

Sygnałem wejściowym modulatora FM jest sygnał harmoniczny o częstotliwości $f_m = 10$ kHz. Sygnał wyjściowy modulatora wzmacniany jest we wzmacniaczu pasmowym o szerokości pasma przepustowego równej $B = 210$ kHz. Dewiacja częstotliwości $\Delta f_{FM} = 80$ kHz. W celu usunięcia pewnych nieprawidłowości w działaniu modulatora wprowadzono układ korekcyjny wzmacniający sygnał modulujący przed wprowadzeniem go do modulatora. Transmitancję układu korekcyjnego przedstawia rysunek 1.26:



Rysunek 1.26

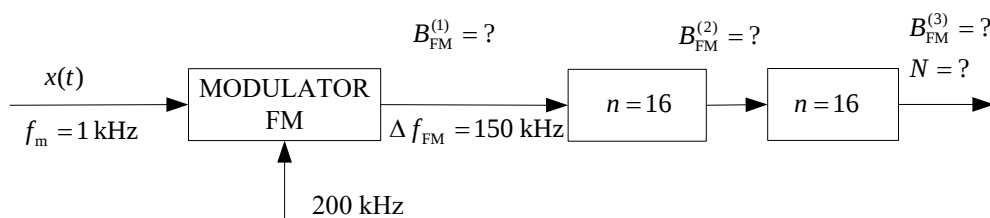
Po wzmocnieniu sygnału modulującego modulator pracuje poprawnie. Jak oceniasz pracę całego układu (korektor, modulator, filtr)?

Zadanie 1.2.9

Sygnał FM o dewiacji częstotliwości równej $\Delta f_{FM} = 10$ kHz i częstotliwości modulującej równej $f_m = 5$ kHz jest podawany na wejście dwóch powielaczy częstotliwości połączonych kaskadowo, z których pierwszy powiększa częstotliwość dwukrotnie, a drugi trzykrotnie. Określić dewiację częstotliwości oraz dewiację fazy dla sygnału FM otrzymanego na wyjściu kaskady powielaczy. Jaka jest różnica częstotliwości sąsiednich prążków bocznych tego sygnału FM?

Zadanie 1.2.10

Na rysunku 1.27 przedstawiono układ modulacji z powielaniem częstotliwości. Wyznacz szerokości pasma zajmowane przez sygnały po przejściu kolejnych stopni układu oraz liczbę prążków istotnych w widmie sygnału wyjściowego kaskady.



Rysunek 1.27

Zadanie 1.2.11

Sygnał harmoniczny o częstotliwości $f_m = 5$ kHz jest sygnałem modulującym w modulatorze AM i FM. Amplitudy niemodulowanych fal nośnych są jednakowe. Szerokość pasma sygnału zmodulowanego FM wynosi $B_{FM} = 110$ kHz. Amplitudy

pierwszych harmonicznym wstęg bocznych są jednakowe. Moc sygnału zmodulowanego AM wynosi $P_{AM} = 10$ W.

Wyznacz:

- dewiację częstotliwości,
- współczynnik głębokości modulacji,
- moc sygnału FM,
- moc składowej nośnej sygnału FM,
- współczynnik sprawności energetycznej sygnału AM.

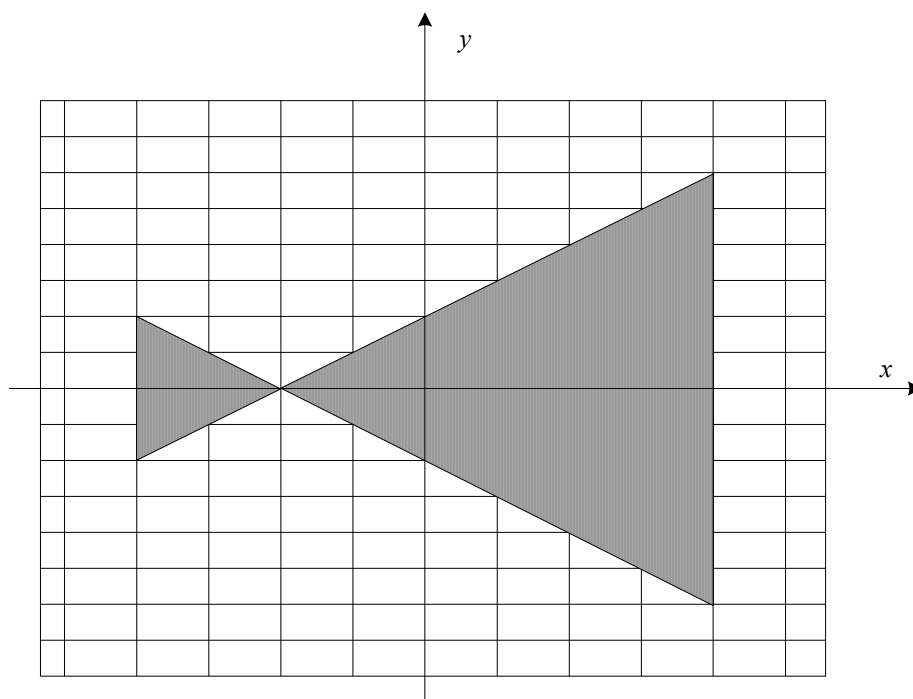
Zadanie 1.2.12

Sinusoida o częstotliwości $f_m = 10$ kHz jest sygnałem modulującym w modulatorze AM i FM. Dewiacja częstotliwości sygnału zmodulowanego FM wynosi $\Delta f_{FM} = 90$ kHz. Amplitudy pierwszych harmonicznym wstęg bocznych są jednakowe. Wiedząc, że moc sygnałów zmodulowanych AM i FM jest taka sama, wyznacz:

- współczynnik głębokości modulacji,
- współczynnik sprawności energetycznej.

Zadanie 1.2.13

Sygnał harmoniczny o częstotliwości $f_m = 5$ kHz jest sygnałem modulującym w systemie AM i FM. Metodą oscyloskopową zbadano modulator AM podając na płytki odchyłania poziomego sygnał modulujący a na płytki odchyłania pionowego sygnał zmodulowany. Rysunek 1.28 pokazuje obraz, który ukazał się na ekranie oscyloskopu. Rozdzielczość oscyloskopu: $C_x = 0,25$ V/dz, $C_y = 2$ V/dz.



Rysunek 1.28

Wiedząc, że moc sygnału zmodulowanego AM i FM jest taka sama, wyznacz moc pierwszych harmonicznym wstęg bocznych oraz szerokość pasma sygnału zmodulowanego FM. Stała modulatora FM $k_{FM} = 45 \cdot 10^3$ Hz/V.

Zadanie 1.2.14

Częstotliwość nośna sygnału modulacji kątowej jest równa $f_0 = 90$ MHz, częstotliwość harmonicznego sygnału modulującego wynosi $f_m = 5$ kHz, a dewiacja częstotliwości $\Delta f_{FM} = 75$ kHz. Wyznacz pasmo B_{FM} zawierające 98% mocy sygnału. Podaj przedział częstotliwości zajmowany przez sygnał zmodulowany.

Zadanie 1.2.15

Dany jest sygnał zmodulowany FM opisany zależnością $\varphi_{FM}(t) = 4 \cos(4\pi \cdot 10^5 t + 3 \sin 2\pi \cdot 10^4 t)$. Wyznacz widmo tego sygnału stosując kryterium amplitudowe $\varepsilon = 0,05$. Uwzględnij na rysunku fazy składowych harmonicznym sygnału.

Zadanie 1.2.16

Wiedząc, że funkcja Bessela przyjmuje wartości $J_2(\Delta\Theta_{FM}) = 0,04$, $J_1(\Delta\Theta_{FM}) = 0,29$ i $J_0(\Delta\Theta_{FM}) = 0,91$ znajdź postać sygnału zmodulowanego $\varphi_{FM}(t)$ oraz szerokość pasma W_{FM} . Zakładamy, że $\omega_0 = 10^6$ rad/s, $\omega_m = 10^4$ rad/s oraz $P_{FM} = 50$ W.

Zadanie 1.2.17

Dla sygnału zmodulowanego kątowo o częstotliwości nośnej $f_0 = 1$ MHz należy wyznaczyć dewiację częstotliwości i fazy oraz amplitudę sygnału modulującego. Sygnał modulujący jest sygnałem harmonicznym, stała modulatora $k_{FM} = 10^4$ Hz/V. Ponadto wiadomo, że dwukrotne zmniejszenie częstotliwości modulującej i jej amplitudy nie spowodowało wzrostu liczby prążków istotnych. Przy pomocy analizatora widma stwierdzono, że:

- harmoniczne sygnału zmodulowanego pojawiają się co 10 kHz,
- począwszy od częstotliwości 0,91 MHz włącznie amplituda harmonicznym jest ponad 20-krotnie mniejsza od amplitudy fali niezmodulowanej.

Zadanie 1.2.18

Moc sygnału FM przy dewiacji częstotliwości $\Delta f_{FM} = 0$ wynosi $P_{FM} = 100$ W. Dewiacja częstotliwości zwiększana jest do wartości, gdy zanika pierwsza harmoniczna wstęp bocznych. Wyznacz moc częstotliwości nośnej oraz moc wstęp bocznych.

Zadanie 1.2.19

Sygnał nośny dla modulacji kąta fazowego ma postać $c(t) = 20 \cos(4\pi \cdot 10^6 t)$. Moc częstotliwości nośnej sygnału wyjściowego wynosi 32 W. Wzmacniacz umieszczony na wyjściu modulatora wzmacnia częstotliwości z przedziału 1,9÷2,3 MHz. Jak należy dobrać częstotliwość sygnału modulującego by układ działał poprawnie? Sygnał modulujący jest sygnałem harmonicznym, zaś wartości funkcji Bessela zerowego i pierwszego rzędu w rozpatrywanym przypadku są ujemne.

Zadanie 1.2.20

Sygnał nośny o częstotliwości $f_0 = 100$ MHz jest modulowany częstotliwościowo sygnałem sinusoidalnym o amplitudzie $a_m = 20$ V i częstotliwości $f_m = 100$ kHz. Stała modulatora FM wynosi $k_{FM} = 25$ kHz/V. Wykonaj następujące polecenia:

- wyznacz przybliżoną szerokość pasma tego sygnału FM posługując się regułą Carsona,
- określ szerokość pasma przy przesyłaniu wyłącznie tych częstotliwości bocznych, których amplitudy przewyższają 1% amplitudy niezmodulowanej fali nośnej,
- powtórz obliczenia z punktu a) i b) zakładając, że amplituda sygnału modulującego wzrasta dwukrotnie,
- powtórz obliczenia z punktu a) i b) zakładając, że częstotliwość sygnału modulującego wzrasta dwukrotnie.

Zadanie 1.2.21

Sygnał harmoniczny o częstotliwości $f_m = 5$ kHz jest sygnałem modulującym w modulatorze AM i FM. Amplitudy niezmodulowanych nośnych są jednakowe i równe 10 V. Dewiacja częstotliwości równa jest czterokrotnej szerokości pasma sygnału AM, $\Delta f_{FM} = 4B_{AM}$. Amplitudy pierwszych harmonicznnych wstęp bocznych są jednakowe. Wyznacz dewiację fazy i współczynnik głębokości modulacji, szerokość pasma sygnału FM, moc całkowitą sygnału FM oraz moc nośnej sygnału FM.

Zadanie 1.2.22

Częstotliwość chwilowa układu rezonansowego LC opisana jest zależnością $\omega(t) = 1/\sqrt{LC(t)}$. Załóżmy, że pojemność $C(t)$ zmienia się według zależności $C(t) = C_0 - \Delta C x(t)$, gdzie $x(t)$ jest sygnałem modulującym o jednostkowej amplitudzie. Podaj założenia, przy których sygnał wyjściowy układu rezonansowego będzie sygnałem FM. Wyznacz dewiację częstości sygnału wyjściowego. W celu znalezienia rozwiązania skorzystaj z rozwinięcia w szereg Taylora funkcji $(1 - \alpha z)^{-1/2}$.

Zadanie 1.2.23

W bezpośrednim modulatorze FM cewka o induktancji $L = 10$ μ H jest połączona z kondensatorem o zmiennej pojemności zależnej od amplitudy sygnału modulującego. Sygnał modulujący $x(t) = \cos(3\pi \cdot 10^4 t)$ wytwarza maksymalną zmianę pojemności $\Delta C = 2\pi$ pF. Dla zerowej wartości sygnału modulującego efektywna pojemność wynosi $C_0 = 1000$ pF. Sygnał wyjściowy układu LC podawany jest na powielacz częstotliwości wytwarzający sygnał o częstości nośnej 150 Mrad/s i pewnej dewiacji fazy. Korzystając ze sposobu postępowania przedstawionego w zadaniu 1.2.22 wyznacz szerokość pasma sygnału wyjściowego mierzoną na wyjściu powielacza.

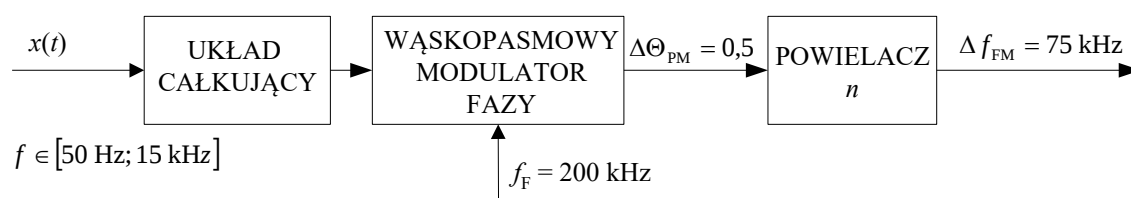
Zadanie 1.2.24

Sygnał harmoniczny $x(t) = 2 \cos(3\pi \cdot 10^4 t)$ jest sygnałem modulującym w bezpośrednim modulatorze FM wytwarzającym sygnał o częstości nośnej $\omega_0 = 10$

Mrad/s. Sygnał wyjściowy modulatora FM jest podawany na wejście powielacza częstotliwości wytwarzającego sygnał o częstotliwości nośnej 150 Mrad/s. Szerokość pasma sygnału wyjściowego mierzona na wyjściu powielacza częstotliwości wynosi 180 kHz. Wyznacz współczynnik powielania powielacza częstotliwości oraz stałą bezpośredniego modulatora FM.

Zadanie 1.2.25

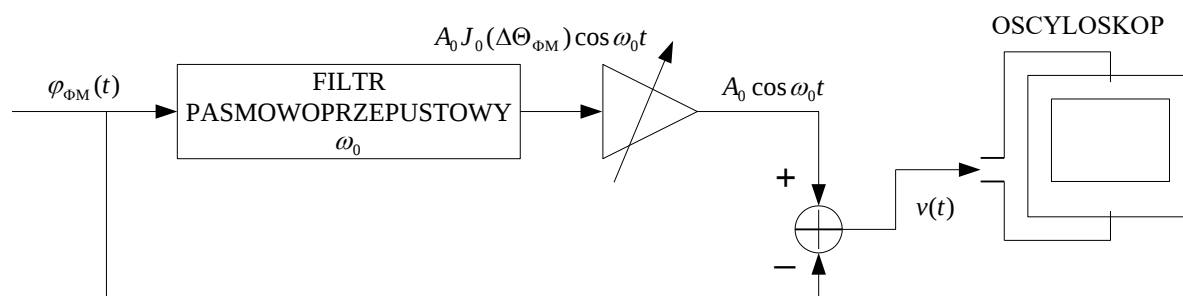
Minimalna dewiacja częstotliwości pośredniego modulatora FM ma wynosić $\Delta f_{\text{FM}} = 75$ kHz. Sygnał modulujący zawiera częstotliwości od 50 Hz do 15 kHz. Przyjmujemy, że wąskopasmową modulację kąta fazowego realizujemy do dewiacji fazy równej $\Delta\Theta_{\text{PM}} = 0,5$ rad. Częstotliwość nośna wąskopasmowego modulatora fazy wynosi $f_{\text{F}} = 200$ kHz. Sygnał FM na wyjściu nadajnika powinien mieć częstotliwość nośną $f_0 = 91,2$ MHz. Dobierz krotność powielania powielacza częstotliwości.



Rysunek 1.29

Zadanie 1.2.26

Sygnał zmodulowany kątowno jest sygnałem wejściowym układu przedstawionego na rysunku 1.30, złożonego z filtra pasmowoprzepustowego, wzmacniacza, układu sumującego oraz oscyloskopu. Wykorzystując oscyloskop oszacuj wartość dewiacji fazy sygnału zmodulowanego kątowno $\varphi_{\Phi\text{M}}(t)$.



Rysunek 1.30

Zadanie 1.2.27

Twierdzenie Woodwarda mające zastosowanie dla szerokopasmowej modulacji częstotliwości mówi, że przy wskaźniku dewiacji fazy $\Delta\Theta_{\text{FM}} \rightarrow \infty$ kształt widmowej gęstości mocy sygnału FM jest wyznaczony przez rozkład prawdopodobieństwa

wartości sygnału modulującego. Wyznacz kształt widma gęstości mocy szerokopasmowej, tonowej modulacji częstotliwości.

2. SZUMY W UKŁADACH MODULACJI CIĄGŁYCH

2.1. WSTĘP TEORETYCZNY

Dla celów analizy odporności modulacji ciągłych harmonicznego sygnału nośnego na szum kanałowy zakłada się, że modelem tego szumu jest addytywny, biały szum gaussowski AWGN (ang. *Additive White Gaussian Noise*) o stałej widmowej gęstości mocy η W/rad/s w bardzo szerokim zakresie częstotliwości. Szerokopasmowy szum AWGN sumuje się w kanale transmisyjnym z sygnałem użytecznym (sygnałem zmodulowanym) i w procesie filtracji oraz demodulacji (detekcji) realizowanej w odbiorniku powoduje zakłócenia (zaszumienie) sygnału odbieranego.

Pierwszym członem wejściowym odbiornika jest filtr wąskopasmowy, dostrojony do częstotliwości nośnej, o szerokości pasma przepustowego równej szerokości pasma sygnału zmodulowanego. Ten filtr, nazywany niekiedy przeddetekcyjnym, nie zmienia charakterystyk częstotliwościowych sygnału zmodulowanego, natomiast eliminuje pozapasmowe składowe szumu kanałowego. Szum wyjściowy tego filtra (a jednocześnie szum wejściowy do detektora) jest szumem wąskopasmowym, który powszechnie przedstawia się w reprezentacji dolnopasmowej:

$$n(t) = n_I(t) \cos \omega_0 t - n_Q(t) \sin \omega_0 t, \quad (2.1)$$

gdzie $n_I(t)$ jest składową synfazową (ang. *inphase component*), zaś $n_Q(t)$ składową kwadraturową (ang. *quadrature component*). Tak więc sumaryczny sygnał wejściowy detektora jest równy:

$$\varphi(t) + n(t) = \varphi(t) + n_I(t) \cos \omega_0 t - n_Q(t) \sin \omega_0 t. \quad (2.2)$$

Dowodzi się, że widmo gęstości mocy obydwóch składowych szumu jest również płaskie i ma charakter dolnopasmowy, ale jego poziom oraz szerokość jest różna dla modulacji dwuwstęgowych oraz jednowstęgowych.

I tak, dla modulacji dwuwstęgowych (DSB, AM, FM, PM) szerokość widm składowej synfazowej oraz kwadraturowej jest jednakowa i równa połowie szerokości pasma sygnału zmodulowanego $W/2$, natomiast ich poziom jest równy 2η .

Dla modulacji jednowstęgowych amplitudy (SSB) szerokość widm składowej synfazowej oraz kwadraturowej jest jednakowa i równa szerokości pasma sygnału zmodulowanego $\omega_{\max}$, natomiast ich poziom jest równy η .

Zaszumiony sygnał wyjściowy detektora jest kierowany do dolnopasmowego filtra poddetekcyjnego, którego zadaniem jest eliminacja pozapasmowych składowych szumu oraz nieliniowych produktów detekcji, bez zmiany charakterystyk sygnału użytecznego.

Jakość transmisji można ocenić na podstawie znajomości wyjściowego odstępów sygnał-szum:

$$SNR_o [\text{dB}] = \gamma_o [\text{dB}] = 10 \log P_o / N_o \quad (2.3)$$

gdzie P_o jest mocą sygnału użytecznego na wyjściu odbiornika, zaś N_o mocą zakłócającego go szumu.

Pamiętajmy jednak, że równie istotnym parametrem jest odstęp sygnał-szum na wejściu do detektora, bo to on decyduje o warunkach pracy tego urządzenia:

$$SNR_i [\text{dB}] = \gamma_i [\text{dB}] = 10 \log P_i / N_i, \quad (2.4)$$

gdzie P_i jest mocą sygnału zmodulowanego (filtr przeddetekcyjny nie wpływa na sam sygnał zmodulowany), zaś N_i mocą zakłócającego go addytywnego szumu wąskopasmowego.

Obydwa wskaźniki jakości – wejściowy oraz wyjściowy odstęp sygnał szum – łączy się zazwyczaj w jeden syntetyczny:

$$G[\text{dB}] = 10 \log \frac{SNR_o}{SNR_i} = 10 \log \frac{\gamma_o}{\gamma_i} = 10 \log \frac{P_o/N_o}{P_i/N_i} = SNR_o[\text{dB}] - SNR_i[\text{dB}] \quad (2.5)$$

nazywany zyskiem modulacyjnym, a wskazującym, czy i na ile proces detekcji powiększył wejściowy odstęp sygnał-szum (w stosunku do wejściowego odstępu sygnał-szum).

Ponieważ szerokość pasma zajmowanego przez sygnał zmodulowany jest również istotnym parametrem służącym do oceny systemu modulacyjnego, można zysk modulacyjny odnosić do względnej szerokości pasma sygnału zmodulowanego:

$$\kappa = W/\omega_{\max} \quad (2.6)$$

gdzie W jest szerokością pasma sygnału zmodulowanego, a $\omega_{\max}$ – szerokością pasma sygnału modulującego.

Wzór określający zysk modulacyjny (odniesiony do szerokości pasma) przyjmuje zatem następującą postać:

$$g = \frac{G}{\kappa}[\text{dB}] = 10 \log \frac{SNR_o/\kappa}{SNR_i} = 10 \log \frac{\gamma_o/\kappa}{\gamma_i} \quad (2.7)$$

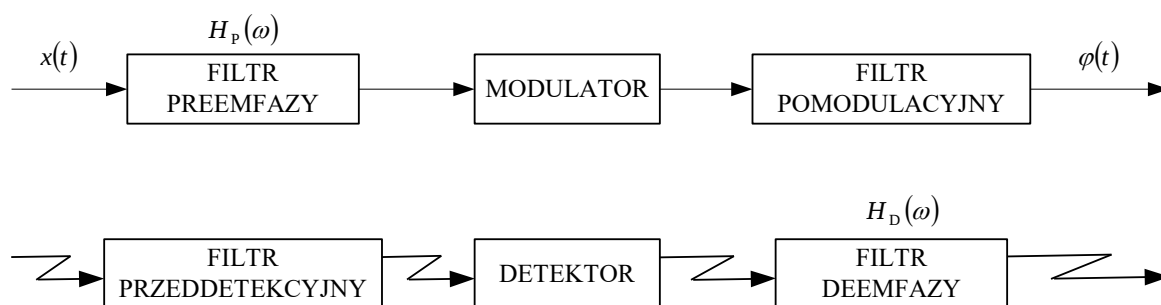
Zależność wyjściowego odstępu sygnał-szum (odniesionego do szerokości pasma) od wejściowego odstępu sygnał-szum jest nazywana charakterystyką szumową systemu modulacyjnego:

$$\gamma_o/\kappa = f(\gamma_i) \quad (2.8)$$

Charakterystyki szumowe rysowane w układzie współrzędnych log-log pozwalają na łatwe porównywanie odporności na szum różnych systemów modulacyjnych.

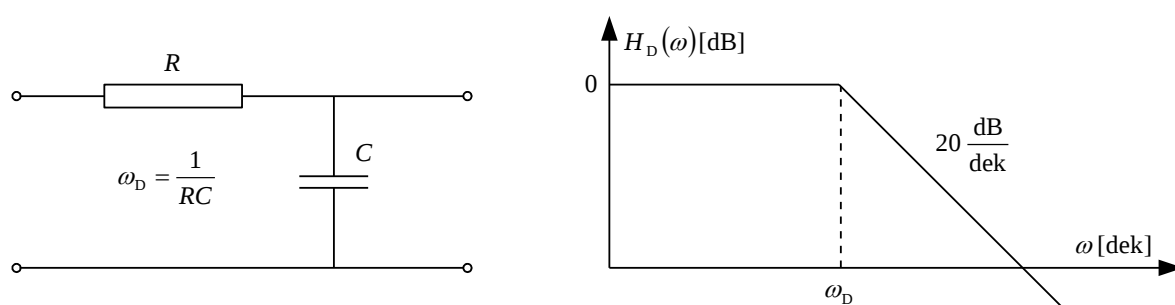
Dla systemu bezmodulacyjnego odniesiony zysk modulacyjny jest jednostkowy $g = 1 = 0 \text{ dB}$, a więc można przyjąć, że zysk modulacyjny informuje również o ile dB system modulacyjny jest lepszy/gorszy od systemu bez modulacji (transmisja w paśmie podstawowym sygnału).

Wstępna filtracja sygnału modulującego w nadajniku (uwypuklenie pewnego zakresu częstotliwości), zwana preemfazą, połączona z deemfazą realizowaną już w odbiorniku (przywrócenie pierwotnego poziomu częstotliwości sygnału) jest wykorzystywana w detekcji sygnału FM (oraz także w detekcji obwiedni sygnału AM) do uzyskania większej wartości odstępu sygnał-szum na wyjściu odbiornika. Schemat blokowy nadajnika i odbiornika jest pokazany na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1

Przykładowe rozwiązania filtru deemfazy oraz jego logarytmiczną charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową przedstawia rysunek 2.2.

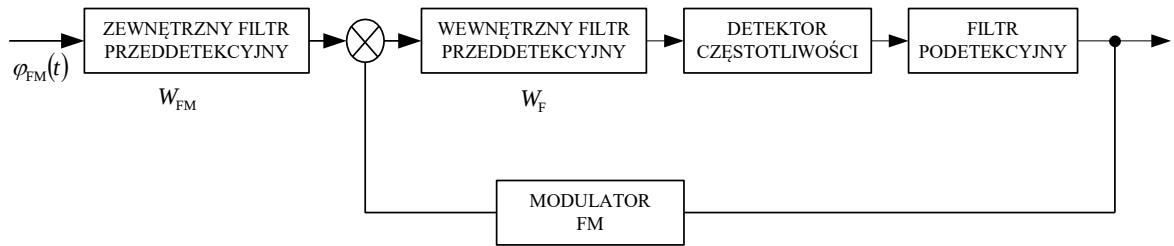


Rysunek 2.2

Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe filtrów preemfazy i deemfazy są tak dobrane aby ich łączny wpływ na poziom częstotliwości składowych sygnału modulującego znosił się, $H_p(\omega)H_D(\omega)=1$. Szum kanałowy zakłócający sygnał dopiero w odbiorniku podlega wyłącznie deemfazie (jego poziom zostaje obniżony), co pozwala uzyskać pewien wzrost odstępu sygnał-szum na wyjściu odbiornika, zwany zyskiem deemfazy.

Preemfaza oraz towarzysząca jej deemfaza jest rozwiązaniem szczególnie polecanym dla systemów FM, ponieważ „różniczkujące” działanie detektora częstotliwości (objawiające się samoistnym uwypuklaniem częstotliwości przez czynnik $\sim \omega^2$) skutkuje niekorzystnym uwypuklaniem składowych częstotliwościowych szumu w górnej części pasma sygnału modulującego, a więc tam, gdzie jego poziom jest na ogół bardzo słaby.

Preemfaza oraz towarzysząca jej deemfaza nie jest w stanie obniżyć progowej wartości odstępu sygnał-szum (na wejściu detektora) dla systemu FM. Efekt ten można uzyskać w odbiorniku FM z kompresją pasma; wartość zysku deemfazy zależy od transmitancji zastosowanego filtru. Schemat najprostszego odbiornika FM z kompresją pasma jest przedstawiony na rysunku 2.3.



Rysunek 2.3

Odpowiedni dobór parametrów pętli sprzężenia zwrotnego pozwala na zawężenie (kompresję) pasma sygnału FM na wejściu wewnętrznego filtra przeddetekcyjnego od szerokości zastosowanej w transmisji W_{FM} do minimalnej możliwej szerokości $\min W_F = 2\omega_{\max}$; szerokość pasma zostaje zawężona w stosunku $1 + k_F/k_{FM}$, gdzie k_F jest stałą modulatora w pętli sprzężenia zwrotnego, a k_{FM} jest stałą modulatora nadajnika. Pasma zostaje zawężone zatem w stosunku $\Delta\Theta_{FM} \approx W_{FM}/(2\omega_{\max})$, wartość progowa zostaje obniżona o $10\log \Delta\Theta_{FM}$ [dB].

2.2. TEMATY ZADAŃ

Zadanie 2.1

Dla sygnału AM znajdź związek pomiędzy odniesionym zyskiem modulacyjnym g_{AM} a stosunkiem mocy wstęp bocznych do mocy całego sygnału μ_{AM} . Wyznacz maksymalny odniesiony zysk modulacyjny przy założeniu, że nie występuje przemodulowanie.

Zadanie 2.2

Odbiornik AM otrzymuje sygnał tonowej modulacji AM; współczynnik głębokości modulacji wynosi $m = 80\%$, a odstęp sygnał-szum na wyjściu odbiornika jest równy $\gamma_o = 30$ dB. Oblicz:

- jaki odstęp nośna-szum γ_N odpowiada tym warunkom,
- o ile decybeli możemy zmniejszyć odstęp nośna-szum γ_N tak, aby system pracował tuż ponad progiem.

Przyjmij, że wartość progowa osiągnięta jest dla wejściowego odstępu sygnał-szum równego $\gamma_i = 10$ dB.

Zadanie 2.3

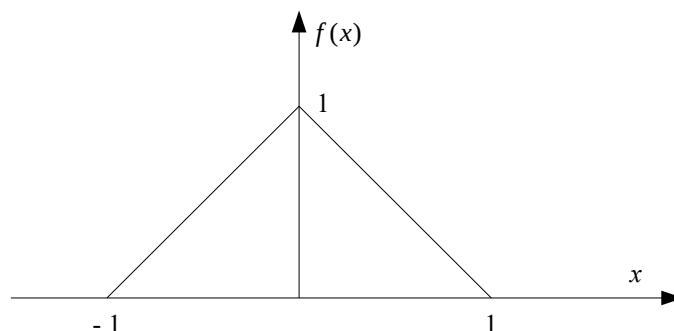
Widmowa gęstość mocy szumu mierzona na wejściu odbiornika AM wynosi $\eta = 10^{-3}$ W/Hz. Moc fali nośnej jest równa $P_N = 800$ W, moc wstęp bocznych $P_B = 200$ W, sygnałem modulującym jest sygnał harmoniczny o częstotliwości $f_m = 5$ kHz. Oblicz wejściowy odstęp sygnał-szum oraz odniesiony zysk modulacyjny.

Zadanie 2.4

Żądamy, by odstęp sygnał-szum na wyjściu odbiornika sygnału AM wynosił 30 dB. Wyznacz amplitudę fali nośnej tak, aby powyższe wymaganie zostało spełnione. Znane są następujące parametry systemu: widmowa gęstość mocy szumu $\eta = 10^{-8}$ W/Hz, maksymalna częstotliwość sygnału modulującego $f_m = 2$ kHz, współczynnik głębokości modulacji $m = 0,8$.

Zadanie 2.5

Sygnał $x(t)$ o trójkątnym rozkładzie funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ pokazanej na rysunku 2.4 jest sygnałem modulującym w systemie AM. Należy wyznaczyć wartość amplitudy sygnału nośnego A_0 tak, aby odstęp sygnał-szum na wyjściu układu AM wynosił $\gamma_o = 40$ dB. Znane są następujące parametry systemu: maksymalna częstotliwość sygnału modulującego $f_{max} = 4$ kHz, współczynnik głębokości modulacji $m = 1$, widmowa gęstość mocy szumu $\eta = 10^{-12}$ W/Hz.



Rysunek 2.4

Zadanie 2.6

Żądamy, by odstęp sygnał-szum na wyjściu układu odbiornika AM wynosił $\gamma_0 = 30$ dB. Częstotliwość graniczna sygnału modulującego jest równa $f_{\max} = 5$ kHz. Moc sygnału zmodulowanego AM wynosi $P_{\text{AM}} = 10$ W, moc szumu wejściowego detektora $N_i = 1$ mW. Wyznacz amplitudę fali nośnej.

Zadanie 2.7

Rozważamy system AM z detekcją obwiedni. Obwiednia $r(t)$ szumu wąskopasmowego $n(t)$ ma rozkład Rayleigha dany wzorem:

$$f(r) = \frac{r}{\sigma_N^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_N^2}\right)$$

gdzie σ_N^2 to wariancja szumu $n(t)$, która w systemie AM jest równa mocy szumu w paśmie sygnału zmodulowanego. Aby detektor obwiedni pracował w obszarze nadprogowym prawdopodobieństwo przekroczenia przez obwiednię szumu wąskopasmowego $r(t)$ amplitudy fali nośnej powinno być nie większe niż 0,01, $\Pr\{r(t) \geq A_0\} \leq 0,01$. Wyznacz wartość γ zdefiniowaną jako stosunek mocy nośnej do mocy szumu w paśmie sygnału informacyjnego odpowiadający postawionemu warunkowi. Wynik wyraż w decybelach.

Wskazówka: $\int_t^{+\infty} \frac{x}{a} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) dx = \exp\left(-\frac{t^2}{2a}\right)$

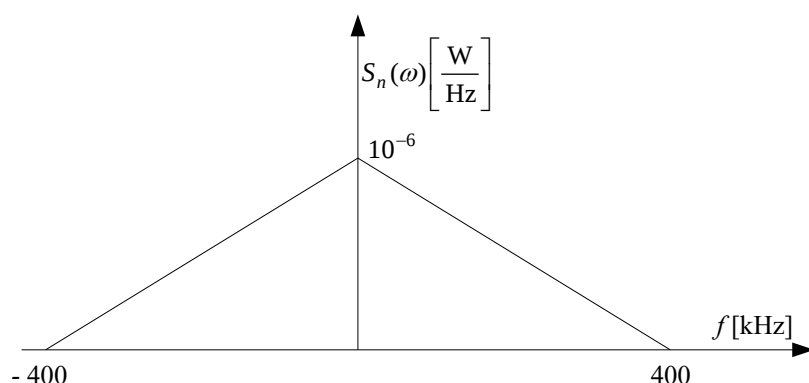
Zadanie 2.8

Wyznacz wyjściowy odstęp sygnał-szum dla odbiornika AM z detekcją obwiedni. Sygnałem modulującym jest sygnał harmoniczny. Oblicz, o ile dB system ten jest gorszy od systemu DSB-SC. Jako miarę jakości systemu zastosuj wyjściowy odstęp sygnał-szum.

Zadanie 2.9

Sygnał zmodulowany DSB-SC jest przesyłany przez zaszumiony kanał, w którym widmowa gęstość mocy szumu dana jest wykresem z rysunku 2.5. Szerokość pasma

sygnału modulującego wynosi $f_{\max} = 4$ kHz, częstotliwość nośna $f_0 = 200$ kHz oraz $P_{\text{DSB-SC}} = 10$ W. Określ wyjściowy odstęp sygnał-szum.



Rysunek 2.5

Zadanie 2.10

W tonowej modulacji PM odniesiony zysk modulacyjny jest równy $g_{\text{PM}} = 3$ dB, moc szumu w paśmie sygnału modulującego wynosi $N_x = 10$ mW, zaś moc sygnału zmodulowanego PM $P_{\text{PM}} = 0,5$ W. Wyznacz

- wyjściowy odstęp sygnał-szum γ_o ,
- zysk modulacyjny G_{PM} .

Zadanie 2.11

Żądamy, by odstęp sygnał-szum na wyjściu odbiornika FM wynosił $\gamma_o = 40$ dB.

Znane są następujące parametry:

- maksymalna częstotliwość sygnału modulującego $f_{\max} = 4$ kHz,
- maksymalna wartość sygnału modulującego $|x|_{\max} = 2$ V,
- amplituda fali nośnej $A_0 = 10$ V,
- moc sygnału modulującego $P_x = 8/3$ W,
- widmowa gęstość mocy szumu w kanale $\eta = 0,5$ mW/Hz.

Oblicz wymaganą szerokość pasma transmisji B_{FM} i odniesiony zysk modulacyjny g_{FM} .

Zadanie 2.12

Widmowa gęstość mocy szumu białego w kanale transmisyjnym wynosi $\eta = 0,5$ mW/Hz. Amplituda fali nośnej jest równa $A_0 = 20$ V, amplituda harmonicznego sygnału modulującego wynosi $a_m = 2$ V. Moc szumu zmierzona w paśmie sygnału modulującego wynosi $N_x = 0,5$ W. Zakładamy, że modulacja jest szerokopasmowa. Oblicz maksymalną dewiację częstotliwości zapewniającą pracę układu powyżej progu (przyjmij, że wartość progowa osiągnięta jest dla $\gamma_i = 10$ dB) oraz odpowiadający jej wyjściowy odstęp sygnał-szum.

Zadanie 2.13

Szerokość pasma sygnału zmodulowanego FM wynosi $B_{\text{FM}} = 160$ kHz, natomiast amplituda sygnału nośnego $A_0 = 20$ V. O ile możemy zmniejszyć amplitudę sygnału zmodulowanego, aby w przypadku zastosowania odbiornika FM z maksymalną kompresją pasma odstęp sygnał-szum na wejściu nie zmienił się? Szerokość pasma wewnętrznego filtra przeddetekcyjnego jest najmniejsza z dopuszczalnych i wynosi 8 kHz.

Zadanie 2.14

Sygnał harmoniczny służy do wytworzenia sygnału szerokopasmowego FM metodą pośrednią (modulator Armstronga z powielaczem częstotliwości). Dewiacja częstotliwości na wyjściu wąskopasmowego modulatora PM wynosi 4π krad/s. Moc szumu zmierzona w paśmie sygnału modulującego jest równa $N_x = 4$ mW. Widmowa gęstość mocy składowej synfazowej szumu AWGN wynosi $S_1(\omega) = 1$ $\mu\text{W/Hz}$. Częstotliwość nośna generatora w systemie modulacji pośredniej jest $b = 50$ razy większa od częstotliwości sygnału modulującego. Sygnał wyjściowy powielacza częstotliwości po przejściu przez kanał transmisyjny podawany jest na wejście detektora FM. Wiedząc, że współczynnik powielania układu powielacza wynosi $n = 200$, wyznacz:

- odniesiony zysk modulacyjny w dB,
- zysk modulacyjny w dB,
- częstotliwość środkową oraz szerokość pasma filtra przeddetekcyjnego.

Zadanie 2.15

Pewien sygnał należy przesłać za pomocą modulacji FM. Znane są następujące jego parametry:

- moc sygnału $P_x = 3$ W,
- maksymalna częstotliwość sygnału $f_{\text{max}} = 5$ kHz,
- zakres zmienności amplitudy sygnału: $[-3; 2]$ V.

Znajdź szerokość pasma transmisji B_{FM} zapewniającą odniesiony zysk modulacyjny $g_{\text{FM}} = 64$.

Zadanie 2.16

Rozstrzygnij, który z systemów AM czy FM zapewni lepszą jakość odtworzenia sygnału harmonicznego o częstotliwości $f_m = 1$ kHz. Dostępna szerokość pasma wynosi 20 kHz dla obu systemów.

Zadanie 2.17

Nadajnik AM wypromieniowuje sygnał zmodulowany o głębokości modulacji 45%. Częstotliwość harmonicznego sygnału modulującego wynosi 15 kHz. Na wyjściu odbiornika AM umieszczonego w odległości 3 km od nadajnika AM odstęp sygnał-szum wynosi 40 dB. Następnie nadajnik AM zamieniamy na nadajnik FM. Stwierdzamy, że wypromieniowywana moc jest taka sama, jak w przypadku nadajnika AM, natomiast dewiacja częstotliwości sygnału FM wynosi 60 kHz.

Zakładając, że odstęp sygnał-szum na wyjściu odbiornika FM wynosi 40 dB, wyznacz teoretyczną odległość odbiornika od nadajnika dla systemu FM.

Wskazówki:

- załóż, że widmowa gęstość mocy szumu na wejściu odbiornika jest taka sama w obu przypadkach,
- załóż, że odbierana moc sygnału maleje z kwadratem odległości od nadajnika, a więc $P(r) = P/br^2$, gdzie P jest mocą sygnału nadawanego, b oznacza stałą proporcjonalności, natomiast r jest odległością pomiędzy urządzeniami.

Zadanie 2.18

Sygnał harmoniczny jest sygnałem modulującym w systemie AM i FM. Stwierdzono, że nadajnik AM wytwarza sygnał o głębokości modulacji 40%. Następnie zamiast nadajnika AM zastosowano nadajnik FM wytwarzający sygnał opisany zależnością $\varphi_{\text{FM}}(t) = 4 \cos[2\pi \cdot 10^6 t + 4 \sin(30\pi \cdot 10^3 t)]$. W obu przypadkach otrzymano taki sam odstęp sygnał-szum na wyjściu. Wyznacz w dB stosunek mocy sygnału zmodulowanego AM do mocy sygnału zmodulowanego FM. Załóż, że widmowa gęstość mocy szumu na wejściu odbiorników w obu przypadkach jest taka sama.

Zadanie 2.19

W układzie transmisyjnym z modulacją AM zastosowano filtry preemfazy i deemfazy. Wyznacz współczynnik redukcji szumów ρ_{AM} przy założeniu, że:

- szum w kanale transmisyjnym jest szerokopasmowym szumem białym o widmowej gęstości mocy η ,
- w odbiorniku zastosowano detektor obwiedni,
- system pracuje w obszarze nadprogowym.

Zadanie 2.20

W układzie transmisyjnym z modulacją PM zastosowano filtry preemfazy i deemfazy. Oblicz współczynnik redukcji szumów ρ_{PM} przy założeniu, że:

- szum w kanale jest szerokopasmowym szumem białym,
- system pracuje w obszarze nadprogowym.

Zadanie 2.21

W układzie transmisyjnym z modulacją FM zastosowano filtry preemfazy i deemfazy. Oblicz współczynnik redukcji szumów ρ_{FM} przy założeniu, że:

- szum w kanale transmisyjnym jest szerokopasmowym szumem białym,
- system pracuje w obszarze nadprogowym.

Zadanie 2.22

O ile dB w systemie PM poprawi się wyjściowy odstęp sygnał-szum, jeżeli zastosujemy filtry preemfazy i deemfazy? Parametry filtru deemfazy wynoszą $C = 7,96$ nF oraz $R = 10$ k Ω . Szerokość pasma sygnału zmodulowanego $B_{\text{PM}} = 40$ kHz, maksymalna wartość sygnału modulującego $a_m = 2$ V, natomiast stała modulatora $k_{\text{PM}} = 1,5$ rad/V.

Zadanie 2.23

Wyznacz zysk wynikający z zastosowania filtrów preemfazy i deemfazy w systemie FM. Parametry filtru deemfazy wynoszą $C = 8,1 \text{ nF}$ oraz $R = 10 \text{ k}\Omega$. Szerokość pasma sygnału zmodulowanego wynosi $B_{\text{FM}} = 240 \text{ kHz}$, moc harmonicznego sygnału modulującego $P_x = 2 \text{ W}$, natomiast stała modulatora $k_{\text{FM}} = 45 \text{ kHz/V}$.

Zadanie 2.24

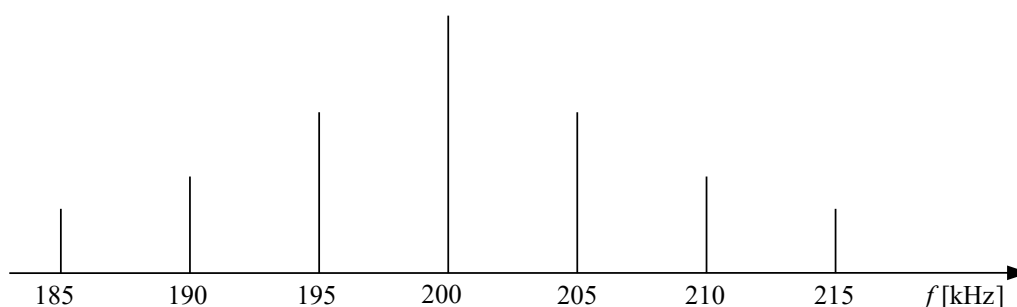
Odbiornik FM z kompresją pasma pracuje z maksymalną kompresją. Moc harmonicznego sygnału modulującego $P_x = 8 \text{ W}$, moc szumu zmierzona w paśmie sygnału modulującego wynosi $N_x = 8 \text{ mW}$, widmowa gęstość mocy szumu $\eta = 10^{-6} \text{ W/Hz}$. Wyznacz wartość stałej modulatora k_F znajdującego się w pętli sprzężenia zwrotnego zapewniającą zmniejszenie mocy szumu wejściowego o 20 dB.

Zadanie 2.25

Odbiornik FM z kompresją pasma pracuje z maksymalną kompresją. Amplituda sygnału nośnego $A_0 = 20 \text{ V}$. Moc szumu zmierzona w paśmie sygnału modulującego wynosi $N_x = 10 \text{ mW}$. Wyznacz dla podanych parametrów odstęp sygnał-szum na wejściu detektora.

Zadanie 2.26

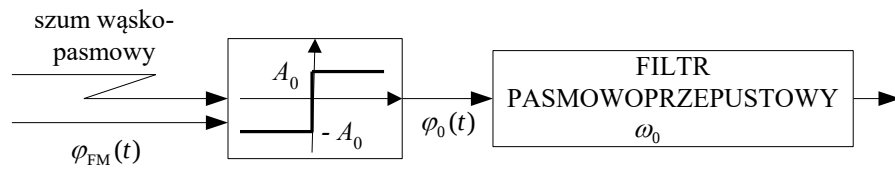
Widmo sygnału podawanego na wejście wewnętrznego filtru przeddetekcyjnego (odbiornik FM z kompresją pasma) i przenoszone przez niego w całości przedstawiono na rysunku 2.6. Wyznacz dewiację pierwotnego sygnału zmodulowanego tak, aby odstęp sygnał-szum zwiększył się o 10 dB w porównaniu z układem bez kompresji pasma.



Rysunek 2.6

Zadanie 2.27

Rysunek 2.7 przedstawia schemat blokowy ogranicznika amplitudy stosowanego w odbiornikach sygnałów FM.



Rysunek 2.7

Uzasadnij analitycznie, że przy spełnieniu pewnych warunków sygnał wyjściowy filtru pasmowoprzepustowego jest sygnałem FM o stałej amplitudzie zakłóconym szumem częstotliwości chwilowej.

W celu rozwiązania zadania pomocne jest wyznaczenie trygonometrycznego szeregu Fouriera funkcji pomocniczej $f(x) = A_0 \operatorname{sgn}(\cos x)$, a następnie zmiana argumentu x w taki sposób, by funkcja ta opisywała działanie pierwszego członu ogranicznika amplitudy.

3. MODULACJE IMPULSOWEGO SYGNAŁU NOŚNEGO

3.1. WSTĘP TEORETYCZNY

Sygnał próbkowania idealnego (ang. *ideal sampling*), w którym poszczególne próbki sygnału są reprezentowane przez impulsy Diraca o amplitudzie równej wartości próbki, możemy zapisać w postaci:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT), \quad (3.1)$$

gdzie T jest okresem próbkowania; $\omega_0 = 2\pi/T$ jest częstotliwością próbkowania.

Korzystając z właściwości próbkującej impulsu Diraca sygnał próbkowania idealnego zapisujemy w postaci:

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = x(t) \delta_T(t) \quad (3.2)$$

Sygnał $\delta_T(t) \leftrightarrow \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$ – ciąg impulsów Diraca pojawiających się w regularnych odstępach czasu T – jest nazywany „grzebieniem Diraca”.

Iloczynowa postać sygnału próbkowania idealnego $x_s(t) = x(t) \delta_T(t)$, w której odnajdujemy i sygnał modulujący $x(t)$, i „sygnał nośny” $\delta_T(t)$, pozwala nam traktować proces próbkowania jako modulację impulsowego sygnału nośnego.

Widmo sygnału próbkowania idealnego:

$$x_s(t) = x(t) \delta_T(t) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0) \quad (3.3)$$

jest ciągiem widm sygnału próbkowanego $X(\omega)$ przesuniętych do wielokrotności częstotliwości próbkowania $n\omega_0$.

Założmy, że sygnał $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ jest sygnałem dolnopasmowym o maksymalnej częstotliwości $\omega_{\max}$. Jeżeli częstota próbkowania jest zbyt mała, $\omega_0 < 2\omega_{\max}$, poszczególne segmenty widma sygnału spróbkowanego nakładają się na siebie (ang. *aliasing*), co uniemożliwia efektywne odtworzenie sygnału oryginalnego w wyniku filtracji dolnopasmowej segmentu centralnego.

Jeżeli natomiast częstota próbkowania jest większa lub równa od podwójnej częstotliwości maksymalnej sygnału próbkowanego, $\omega_0 \geq 2\omega_{\max} = \omega_N$, poszczególne segmenty widma sygnału spróbkowanego nie nakładają się na siebie, a to umożliwia właśnie odtworzenie sygnału oryginalnego w drodze filtracji sygnału spróbkowanego. Częstota $\omega_N = 2\omega_{\max}$ jest nazywana częstotliwością Nyquista.

Można udowodnić, że dla próbkowania dokładnie z częstotliwością Nyquista $\omega = 2\omega_{\max} = \omega_N$ sygnał analogowy $x(t)$ wyraża się poprzez swoje dyskretne próbki $x(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ w sposób następujący:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa} \frac{\pi(t - nT)}{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa} \omega_{\max}(t - nT) \quad (3.4)$$

Powyższy szereg jest nazywany szeregiem Kotelnikowa-Shannona.

Próbkowanie idealne moduluje wysokość wyidealizowanych impulsów Diraca, natomiast w próbkowaniu rzeczywistym mamy do czynienia z impulsami o skończonym czasie trwania.

Próbkowanie chwilowe PAM-IS (ang. *Pulse Amplitude Modulation – Instantaneous Sampling*) cechuje się tym, że prostokątny kształt impulsów jest zachowany, a więc:

$$x_{\text{PAM-IS}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \Pi_{\tau}(t - nT), \quad (3.5)$$

gdzie $\Pi_{\tau}(t)$ jest prostokątnym impulsem o jednostkowej amplitudzie oraz czasie trwania równym τ .

Korzystając ze spostrzeżenia, że $\Pi_{\tau}(t - nT) = \Pi_{\tau}(t) * \delta(t - nT)$, sygnał próbkowania chwilowego możemy zapisać w postaci ułatwiającej wyznaczenie jego widma częstotliwościowego:

$$\begin{aligned} x_{\text{PAM-IS}}(t) &= \Pi_{\tau}(t) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] = \Pi_{\tau}(t) * x(t) \delta_T(t) \\ x_{\text{PAM-IS}}(t) &= \Pi_{\tau}(t) * x(t) \delta_T(t) \leftrightarrow \frac{\tau}{T} \text{Sa} \frac{\omega \tau}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wszystkie segmenty widma sygnału PAM-IS, w tym najważniejszy segment centralny, są zniekształcone przez widmo częstotliwościowe impulsu prostokątnego (zniekształcenia apertury). Zniekształcenia apertury są tym mniejsze, im czas trwania impulsów jest krótszy (im mniejszy jest współczynnik wypełnienia ciągu impulsów τ/T). Zniekształcenia apertury można kompensować poprzez odpowiedni dobór charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej filtru odtwarzającego sygnał oryginalny.

Zniekształcenia apertury nie występują w próbkowaniu naturalnym PAM-NS (ang. *Pulse Amplitude Modulation – Natural Sampling*), w którym grzbiety prostokątnych impulsów powtarzają przebieg sygnału próbkowanego:

$$x_{\text{PAM-NS}}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_{\tau}(t - nT) \quad (3.7)$$

Jeżeli ponownie skorzystamy ze związku $\Pi_{\tau}(t - nT) = \Pi_{\tau}(t) * \delta(t - nT)$, to otrzymamy postać sygnału PAM-NS dogodniejszą do analizy widmowej:

$$\begin{aligned} x_{\text{PAM-NS}}(t) &= x(t) \Pi_{\tau}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = x(t) \Pi_{\tau}(t) * \delta_T(t) \\ x_{\text{PAM-NS}}(t) &= \frac{\tau}{T} X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(\pi n \varepsilon) \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(\pi n \varepsilon) X(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Próbkowanie naturalne PAM-NS zapewnia eliminację efektu apertury, a filtracja dolnoprasmowa segmentu centralnego umożliwia odtworzenie sygnału oryginalnego.

Próbki sygnału ciągłego można odwzorowywać również w inne parametry impulsowego sygnału nośnego:

- częstotliwość – PFM (ang. *Pulse Frequency Modulation*),
- czas trwania impulsów – PDM (ang. *Pulse Duration Modulation*), PWM (ang. *Pulse Width Modulation*),

- odstępy pomiędzy impulsami – PIM (ang. *Pulse Interval Modulation*),
- położenie impulsów – PPM (ang. *Pulse Position Modulation*).

W każdym z tych przypadków – gdy próbki sygnału nie są odwzorowywane w amplitudę impulsów tylko w pewien ich parametr „czasowy” – segment centralny widma sygnału zostaje zniekształcony, co uniemożliwia odtworzenie sygnału oryginalnego poprzez wyłącznie filtrację dolnopasmową (tak jak ma to miejsce w przypadku modulacji PAM).

Poprawna demodulacja jest możliwa, gdy najpierw dokonamy konwersji sygnału modulacji PDM (PWM), PIM czy PPM do sygnału PAM, a tak otrzymany sygnał PAM zostanie poddany filtracji dolnopasmowej.

3.2. TEMATY ZADAŃ

Zadanie 3.1

Dolnopasmowy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$) jest sygnałem wejściowym filtru o transmitancji $H(\omega)$. Udowodnić, że sygnał wyjściowy filtru $y(t)$ może być przedstawiony w postaci:

$$y(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h_{2W}(t - nT)$$

gdzie $h_{2W}(t)$ jest odpowiedzią impulsową filtru o transmitancji $\Pi_{2W}(\omega)H(\omega)$.

Zadanie 3.2

Sygnał $x(t)$ jest sygnałem dolnopasmowym o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$); zakres zmienności sygnału jest ograniczony $|x(t)| \leq M$. Korzystając z zależności:

$$\dot{x}\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = -W \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)} x(\tau + nT) \quad Wt = \pi \quad (i)$$

oraz z zależności:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{(\alpha - n\pi)^2} = 1 \quad \alpha = Wt \quad (ii)$$

udowodnić nierówność Bernsteina $|\dot{x}(t)| \leq WM$.

Zadanie 3.3

Twierdzenie o próbkowaniu orzeka, że dolnopasmowy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$) może być wyrażony poprzez swoje próbki $x(nT)$ pobierane z okresem $T = \pi/W$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}W(t - nT) \quad (i)$$

Udowodnić powyższą zależność podstawiając do całki odwrotnego przekształcenia Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

rozwiniecie funkcji wykładniczej $e^{j\omega t}$ w wykładniczy szereg Fouriera względem zmiennej ω w przedziale jej zmienności $|\omega| \leq W$.

Zadanie 3.4

Dolnopasmowy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$) jest sygnałem wejściowym filtru o transmitancji $H(\omega)$. Niech $y(t)$ oznacza sygnał wyjściowy filtru. Udowodnić tożsamość:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) f(t - nT)$$

gdzie $f(t) \Leftrightarrow F(\omega)$ jest odpowiedzią impulsową filtru o transmitancji:

$$F(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{H(\omega)}, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

Rozwiązując zadanie należy rozwinąć funkcję $e^{j\omega t}/H(\omega)$ w wykładniczy szereg Fouriera w przedziale $|\omega| \leq W$, a następnie w zależności określającej odwrotne przekształcenie Fouriera

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

podstawić rozwinięcie funkcji $e^{j\omega t}$.

Założmy, że sygnał $x(t)$ jest przekształcany w sygnał $y(t)$:

$$y(t) = \alpha \int_0^{\infty} x(t - \tau) e^{-\alpha \tau} d\tau$$

Korzystając z otrzymanych wyników wyrazić wartości sygnału $x(t)$ poprzez wartości próbek sygnału $y(t)$.

Zadanie 3.5

Dolnopasmowy sygnał $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$ o szerokości widma równej W ($X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$) jest podawany na wejście dwóch filtrów o transmitancjach $H_1(\omega)$ oraz $H_2(\omega)$; sygnały wyjściowe filtrów wynoszą odpowiednio $g_1(t)$ oraz $g_2(t)$. Z okresem $T = 2\pi/W$ pobierane są próbki $g_1(nT)$ oraz $g_2(nT)$ sygnałów wyjściowych filtrów. Obydwie próbki są pobierane jednocześnie, ale – jak można zauważyć – z częstotliwością dwukrotnie mniejszą aniżeli wynika to z twierdzenia o próbkowaniu. Udowodnić uogólnione twierdzenie o próbkowaniu mówiące o możliwości odtworzenia sygnału z próbek $g_1(nT)$ oraz $g_2(nT)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [g_1(nT) y_1(t - nT) + g_2(nT) y_2(t - nT)] \quad (i)$$

gdzie:

$$y_k(t) = \frac{1}{W} \int_{-W}^0 Y_k(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega \quad k = 1, 2 \quad (ii)$$

przy czym funkcje $Y_1(\omega, t)$ oraz $Y_2(\omega, t)$ są rozwiązaniem poniższego układu równań (czas t dowolny, $-W \leq \omega \leq W$):

$$\begin{cases} 1 = H_1(\omega)Y_1(\omega, t) + H_2(\omega)Y_2(\omega, t) \\ e^{jWt} = H_1(\omega + W)Y_1(\omega, t) + H_2(\omega + W)Y_2(\omega, t) \end{cases} \quad (\text{iii})$$

Wskazówka: lewa strona układu równań (iii) jest okresowa z okresem $T = 2\pi/W$, co oznacza, że funkcje $Y_1(\omega, t)$ oraz $Y_2(\omega, t)$ są również okresowe (w dziedzinie czasu) z tym samym okresem $T = 2\pi/W$:

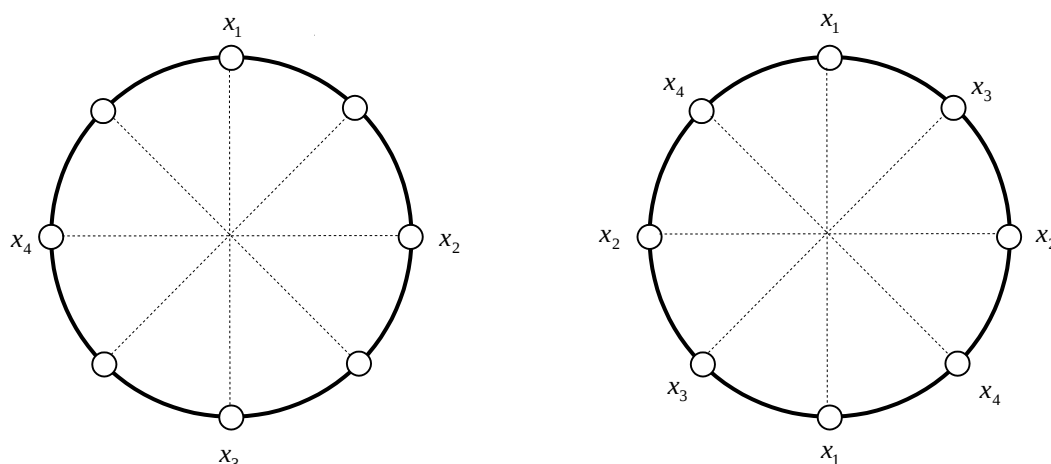
$$Y_k(\omega, t + T) = Y_k(\omega, t) \quad k = 1, 2$$

Wykorzystać uogólnione twierdzenie o próbkowaniu (i), (ii) oraz (iii) do wyrażenia wartości dolnopasmowego sygnału $x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$, $X(\omega) \equiv 0$ dla $|\omega| > W$ za pomocą:

- próbek sygnału $x(nT)$ oraz próbek jego pochodnej $\dot{x}(nT)$,
- sąsiadujących próbek sygnału $x(nT + \tau)$ oraz $x(nT - \tau)$, $|\tau| < T/2$.

Zadanie 3.6

Sygnały x_1, x_2, x_3 , każdy o paśmie $[0; 10]$ kHz oraz sygnał x_4 o częstotliwościach zawartych w paśmie $[6; 11]$ kHz są zwielokrotnione czasowo. Dysponujemy 8-stykowym komutatorem. Który ze sposobów podłączenia sygnałów do styków komutatora pokazanych na rysunku 3.1 jest lepszy, biorąc pod uwagę szerokość pasma sygnału analogowego odpowiadającego sygnałowi zwielokrotnionemu.



Rysunek 3.1

Zadanie 3.7

Dysponujemy dwoma sygnałami o częstotliwości granicznej 4 kHz oraz jednym sygnałem o częstotliwości granicznej 8 kHz. Czy filtr o szerokości pasma $B = 20$ kHz jest wystarczający dla poprawnego zwielokrotnienia czasowego? Zaproponuj schemat komutatora.

Zadanie 3.8

Mamy do dyspozycji 6 sygnałów o szerokości pasma 4 kHz każdy oraz 6 sygnałów o szerokości pasma 15 kHz każdy. Jaka powinna być maksymalna szerokość pasma filtra dolnoprzepustowego? Czy dysponując filtrem dolnoprzepustowym o paśmie $B = 140$ kHz można poprawnie zrealizować zwielokrotnienie? Odpowiedź uzasadnij. Zaproponuj schemat komutatora realizującego zwielokrotnienie.

Zadanie 3.9

Dwadzieścia sygnałów o takiej samej szerokości pasma ma być zwielokrotnionych czasowo za pomocą modulacji PAM. Sygnał złożony, po usunięciu niepotrzebnych składowych widma wykorzystany jest jako sygnał modulujący w systemie AM. Wiedząc, że wejściowy odstęp sygnał-szum wynosi $\gamma_i = 20$ dB, moc sygnału zmodulowanego $P_{AM} = 10$ W, a składowa synfazowa widmowej gęstości mocy jest równa $S_1 = 0,5$ μ W/Hz, wyznacz częstotliwość próbkowania zwielokrotnianych sygnałów.

Zadanie 3.10

Dwadzieścia sygnałów informacyjnych o takiej samej szerokości pasma ma być zwielokrotnionych czasowo za pomocą modulacji PAM. Częstotliwość próbkowania sygnałów jest najmniejszą częstotliwością wynikającą z kryterium Nyquista. Sygnał złożony, po usunięciu niepotrzebnych składowych widma wykorzystany jest jako sygnał modulujący w systemie FM, w którym zastosowano układ z kompresją pasma z parametrami zapewniającymi maksymalną kompresję. Wiedząc, że wejściowy odstęp sygnał-szum wynosi 30 dB, amplituda sygnału zmodulowanego 20 V, składowa synfazowa widmowej gęstości mocy szumu 10^{-6} W/Hz, wyznacz częstotliwość graniczną zwielokrotnianych sygnałów.

Zadanie 3.11

Rozpatrujemy modulację PAM z próbkowaniem chwilowym. Ile wynosiłby efekt apertury w najgorszym przypadku, gdyby zamiast widma centralnego odfiltrowano i analizowano widmo sąsiednie (drugie w kolejności)? Częstotliwość próbkowania zgodna z prawem Nyquista.

4. ROZWIĄZANIA I WSKAZÓWKI

4.1. MODULACJE CIĄGŁE HARMONICZNEGO SYGNAŁU NOŚNEGO

4.1.1. MODULACJE AMPLITUDOWE

Rozwiązanie 1.1.1

Analizując rysunek 1.1 wnioskujemy, że mamy do czynienia z modulacją tonową:

$$\varphi_{AM}(t) = A_0(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$$

Odczytując z rysunku wartości maksymalne i minimalne górnej obwiedni (przyjmowane odpowiednio dla wartości 1 i -1 kosinusa modulującego) można zapisać następujący układ równań:

$$\begin{cases} A_0(1 + m) = 100 \\ A_0(1 - m) = 50 \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy wartość współczynnika głębokości modulacji równą $m = 1/3$.

W drugiej części zadania należy wyznaczyć amplitudę sygnału nośnego tak, aby wartość współczynnika głębokości modulacji zmniejszyła się o 10%. Zatem nowy współczynnik głębokości modulacji:

$$m' = 0,9m = 0,3$$

Wymagane jest, aby wartość międzyszczytowa 50 V nie uległa zmianie. Zachodzi zatem związek:

$$A_0'(1 + m') - A_0'(1 - m') = 50$$

z którego wyznaczamy poszukiwaną amplitudę sygnału nośnego:

$$A_0' = \frac{25}{m'} = 83\frac{1}{3} \text{ V}$$

Rozwiązanie 1.1.2

Z warunków zadania wynika, że współczynnik głębokości modulacji dla sygnału $\varphi_1(t)$ ma wynosić 1. W celu znalezienia wartości amplitudy E_1 należy zapisać sygnał $\varphi_1(t)$ w postaci:

$$\varphi_1(t) = 2 \left(1 + \frac{E_1}{2} \cos \omega_m t \right) \cos \omega_0 t$$

Z porównania otrzymanej zależności z postacią ogólną sygnału zmodulowanego dla modulacji tonowej oraz uwzględnieniu warunku $m = 1$ wynika, że:

$$m = \frac{E_1}{2} = 1$$

skąd wyznaczamy poszukiwaną amplitudę:

$$E_1 = 2 \text{ V}$$

Z postaci sygnału $\varphi_1(t)$ odczytujemy także wartość amplitudy sygnału nośnego $A_0 = 2 \text{ V}$. Teraz wyznaczamy moce analizowanych sygnałów. Należy pamiętać, że moc sygnału harmonicznego $c(t) = A_0 \cos \omega_0 t$ wynosi $P = A_0^2 / 2$.

W przypadku tonowej modulacji AM moc sygnału $\varphi_1(t)$ jest dana następującą zależnością:

$$P_{AM} = \frac{A_0^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

Wstawiając do powyższej zależności wyznaczone wcześniej wartości wyznaczamy moc sygnału $\varphi_1(t)$:

$$P_1 = 3 \text{ W}$$

Moc sygnału $\varphi_2(t) = E_2 \cos \omega_m t \cos \omega_0 t$ wyznaczmy z następującej zależności:

$$P_2 = \frac{E_2^2}{4}$$

Ponieważ z warunków zadania wynika, że musi zachodzić równość mocy obydwu sygnałów $P_1 = P_2$, zatem:

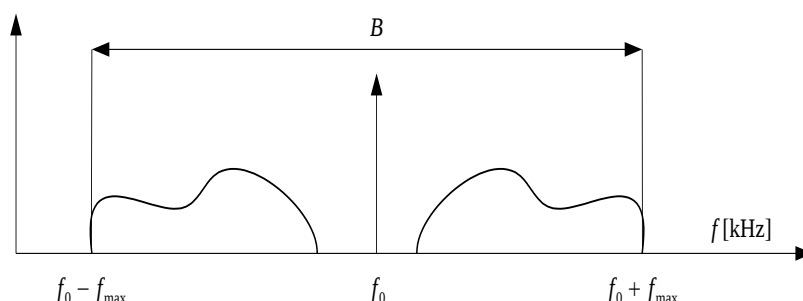
$$\frac{E_2^2}{4} = 3$$

skąd wyznaczamy poszukiwaną amplitudę:

$$E_2 = 2\sqrt{3} \text{ V}$$

Rozwiązanie 1.1.3

Widmo sygnału zmodulowanego AM cechuje się symetrycznym rozkładem wokół częstotliwości nośnej. Graniczne częstotliwości są wyznaczone przez maksymalną częstotliwość sygnału modulującego. Wynika stąd, że nadajnik będzie pracować w paśmie $B \in [100,6; 107,4]$ kHz, co dodatkowo zobrazowano na rysunku R.1.



Rysunek R.1

Rozwiązanie 1.1.4

Ad a)

W celu wyznaczenia wzoru na współczynnik głębokości modulacji m , $m \leq 1$ w zależności od wartości maksymalnej $U_{\max}$ i minimalnej $U_{\min}$ obwiedni sygnału $u_{AM}(t)$ skorzystamy z postaci sygnału $u_{AM}(t)$. Analizując badany sygnał, wyznaczamy jego wartość minimalną i maksymalną, zapisując następujący układ równań:

$$\begin{cases} A_0(1+m) = U_{\max} \\ A_0(1-m) = U_{\min} \end{cases}$$

Po podzieleniu stronami uzyskamy:

$$\frac{1+m}{1-m} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}$$

Ostatecznie:

$$m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}$$

Ad. b)

Aby obliczyć współczynnik zawartości harmoniczných musimy obliczyć moc wstęp boczných i moc sygnału zmodulowanego. Dla sygnału AM moc sygnału zmodulowanego:

$$P_{\text{AM}} = \frac{A_0^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

Moc wstęp boczných:

$$\phi(t) = mA_0 \cos \omega_m t \cos \omega_0 t$$

dana jest zależnością:

$$P_B = \frac{m^2 A_0^2}{4}$$

Po podstawieniu wyznaczonych wielkości do wzoru definiującego współczynnik zawartości harmoniczných uzyskamy zależność:

$$h = \sqrt{\frac{P_B}{P_{\text{AM}}}} = \sqrt{\frac{m^2}{2+m^2}}$$

z której wyznaczamy poszukiwany współczynnik głębokości modulacji:

$$m = \sqrt{\frac{2}{1-h^2}} h$$

Rozwiązanie 1.1.5

Ad. a)

W zadaniu 1.1.4 wyprowadziliśmy zależność pozwalającą na wyznaczenie współczynnika głębokości modulacji na podstawie znajomości maksymalnej i minimalnej wartości obwiedni sygnału zmodulowanego:

$$m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}$$

Wartość minimalna sygnału $u_{\text{AM}}(t) = A_0(1 + 0,3\cos\omega_m t + 0,4\cos 2\omega_m t)\cos\omega_0 t$ wynosi $U_{\min} \approx 0,57A_0$, zaś wartość maksymalna $U_{\max} = 1,7A_0$. Zatem współczynnik głębokości modulacji $m \approx 0,5$.

Ad. b)

Związek na współczynnik głębokości modulacji w zależności od współczynnika zawartości harmoniczych, wyprowadzony w zadaniu 1.1.4, jest następujący:

$$m = \sqrt{\frac{2}{1-h^2}} h$$

Obliczamy najpierw moc sygnału zmodulowanego:

$$P_{AM} = 2,25 \frac{A_0^2}{4}$$

Moc wstęp bocznych wynosi:

$$P_B = 0,25 \frac{A_0^2}{4}$$

Uwzględniając powyższe zależności, wnioskujemy, że $h=1/3$. Po podstawieniu uzyskanej wartości do podanego na wstępie wzoru wartość poszukiwanego współczynnika głębokości modulacji $m=0,5$.

Rozwiązanie 1.1.6

Współczynnik sprawności energetycznej dla modulacji AM jest zdefiniowany jako stosunek mocy wstęp bocznych do mocy sygnału zmodulowanego:

$$\mu_{AM} = \frac{P_B}{P_{AM}}$$

Można pokazać, że dla tonowej modulacji AM przyjmuje on postać:

$$\mu_{AM} = \frac{\frac{m^2 A_0^2}{4}}{\frac{A_0^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)} = \frac{m^2}{2 + m^2}$$

Aby wyznaczyć wartość współczynnika głębokości modulacji dla sygnału opisanego wzorem $\varphi_{AM}(t) = (A + 2B \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$ należy zapisać go w postaci:

$$\varphi_{AM}(t) = A \left(1 + \frac{2B}{A} \cos \omega_m t\right) \cos \omega_0 t$$

Porównując otrzymaną zależność z postacią ogólną sygnału zmodulowanego amplitudowo uzyskujemy $m = 2B/A$. Po wstawieniu uzyskanej wartości do równania na współczynnik sprawności energetycznej otrzymujemy:

$$\frac{\left(\frac{2B}{A}\right)^2}{2 + \left(\frac{2B}{A}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

Po krótkich przekształceniach uzyskujemy:

$$m = \frac{2B}{A} = \sqrt{2/3}$$

Zatem szukana wartość:

$$\frac{A}{B} = \sqrt{6}$$

Rozwiązanie 1.1.7

Sygnał jednowstęgowy z dolną wstęgą boczną opisany jest zależnością:

$$\varphi_{\text{SSB-SC}^-}(t) = kA_0 x(t) \cos \omega_0 t + kA_0 \hat{x}(t) \sin \omega_0 t$$

gdzie $\hat{x}(t)$ jest transformatą Hilberta sygnału modulującego. Dla uproszczenia obliczeń zakładamy, że $kA_0 = 1$. Wówczas:

$$\varphi_{\text{SSB-SC}^-}(t) = x(t) \cos \omega_0 t + \hat{x}(t) \sin \omega_0 t$$

Uwzględniając wielkości występujące w zadaniu możemy zapisać następujące równanie:

$$\varphi_{\text{SSB-SC}^-}(t) = (\cos 2 \cdot 10^3 t + \cos 5 \cdot 10^3 t) \cos 10^4 t + (\sin 2 \cdot 10^3 t + \sin 5 \cdot 10^3 t) \sin 10^4 t$$

ponieważ transformata Hilberta:

$$H\{\cos \omega_m t\} = \cos(\omega_m t - \pi/2) = \sin \omega_m t$$

Po zastosowaniu wzorów trygonometrycznych sygnał zostaje uproszczony do postaci:

$$\varphi_{\text{SSB-SC}^-}(t) = \cos 8 \cdot 10^3 t + \cos 5 \cdot 10^3 t$$

Rozwiązanie 1.1.8

Przyjmujemy zwyczajowe założenie, że współczynnik głębokości modulacji $m \geq 0$. Niewystępowanie przemodulowania równoważne jest warunkowi:

$$1 + m \cos \omega_m t + m \cos 2\omega_m t \geq 0$$

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$\cos \omega_m t = x$$

$$\cos 2\omega_m t = 2x^2 - 1$$

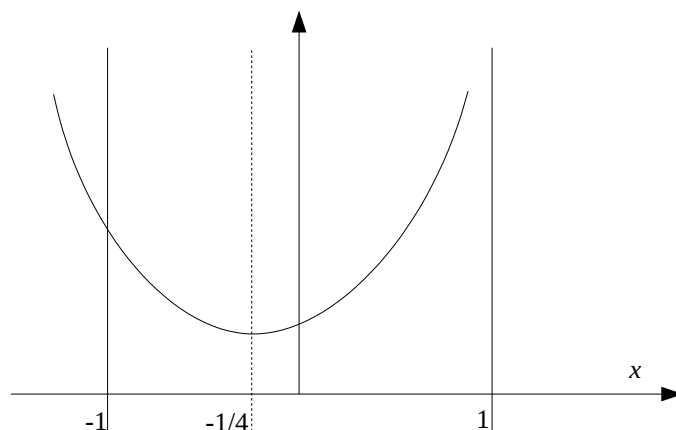
Warunek braku przemodulowania przyjmuje zatem następującą postać:

$$1 + mx + m(2x^2 - 1) \geq 0$$

Po przekształceniach:

$$2mx^2 + mx + (1 - m) \geq 0 \quad x \in [-1, 1]$$

Ponieważ wierzchołek paraboli (wykresu trójkątnu kwadratowego) leży zawsze na prostej $x = -1/4$, wystarczy zatem rozpatrzeć przypadek $\Delta \leq 0$ przedstawiony na rysunku R.2:



Rysunek R.2

Wyróżnik Δ dla rozpatrywanej nierówności przyjmuje następującą postać:

$$\Delta = m^2 - 8m(1-m) \leq 0$$

$$9m^2 - 8m \leq 0$$

Stwierdzamy wobec tego, że przemodulowanie nie będzie występować dla:

$$m \in \left[0, \frac{8}{9}\right]$$

Poszukujemy maksymalnej wartości współczynnika sprawności energetycznej μ_{AM} dla $0 \leq m \leq 8/9$. Współczynnik sprawności energetycznej dla modulacji AM jest zdefiniowany jako stosunek mocy wstęg bocznych do mocy sygnału zmodulowanego:

$$\mu_{AM} = \frac{P_B}{P_{AM}}$$

Dla rozpatrywanego sygnału moc wstęg bocznych wynosi:

$$P_B = \frac{m^2 A_0^2}{2}$$

natomiast moc sygnału zmodulowanego:

$$P_{AM} = \frac{A_0^2}{2} (1 + m^2)$$

Zatem współczynnik sprawności energetycznej przyjmuje postać:

$$\mu_{AM}(m) = \frac{m^2}{1 + m^2}$$

Funkcja $\mu_{AM}(m)$ jest w przedziale $m \in [0, 8/9]$ rosnąca, zatem maksymalna wartość współczynnika sprawności energetycznej zostanie osiągnięta dla $m = 8/9$:

$$\mu_{AM}\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{\frac{64}{81}}{1 + \frac{64}{81}} = \frac{64}{145} \approx 0,44$$

Rozwiązanie 1.1.9

Postać ogólną sygnału zmodulowanego amplitudowo można przedstawić za pomocą następującego wzoru:

$$\varphi_{AM}(t) = A_0[1 + kx(t)]\cos\omega_0 t$$

gdzie $x(t)$ jest sygnałem modulującym.

Moc sygnału nośnego wyznaczamy ze wzoru:

$$P_N = \frac{1}{2} A_0^2$$

Moc wstęp bocznych dana jest wzorem:

$$P_B = \frac{1}{2} k^2 A_0^2 \overline{x^2} = \frac{1}{2} k^2 A_0^2 P_x$$

gdzie

$$P_x = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

jest wartością średniokwadratową sygnału $x(t)$. A zatem:

$$P_B = P_N k^2 \overline{x^2}$$

Moc sygnału modulującego:

$$P_x = a^2$$

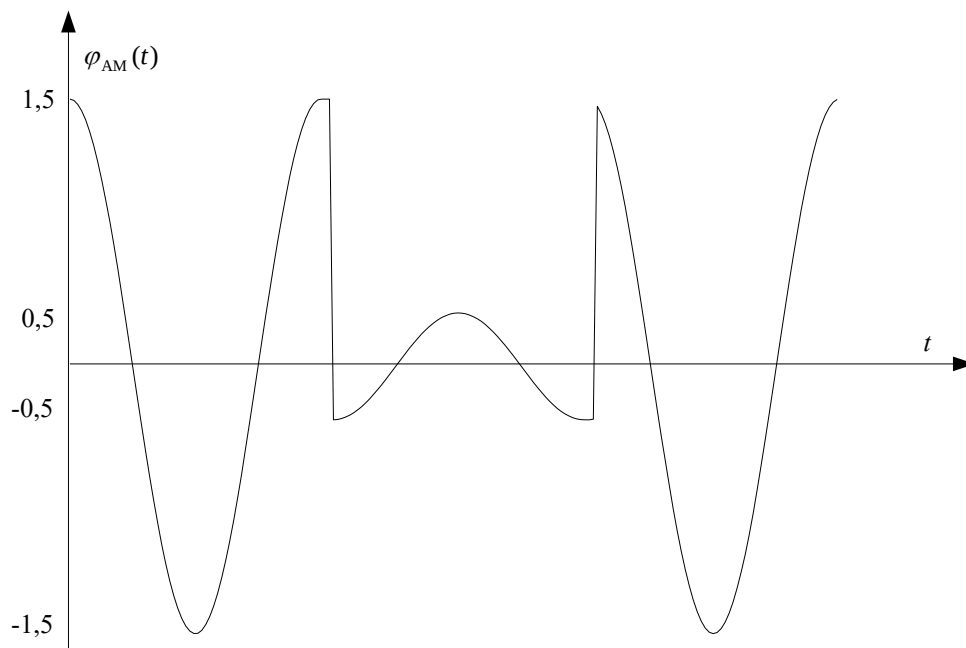
Dane z zadania pozwalają nam zapisać następujący związek:

$$P_B = 2,25 P_N$$

Łącząc powyższe wyrażenia otrzymujemy następujące równanie:

$$\overline{x^2} = a^2 = 2,25$$

skąd wyznaczamy poszukiwaną amplitudę $a = 1,5$ sygnału modulującego. Ponieważ $x(t)_{\min} = -1,5$, zatem w rozpatrywanej sytuacji występuje przemodulowanie. Na rysunku R.3 przedstawiono przebieg czasowy sygnału zmodulowanego $\varphi_{AM}(t)$.



Rysunek R.3

Rozwiązanie 1.1.10

Ogólna postać sygnału zmodulowanego DSB-SC dana jest zależnością:

$$\varphi_{\text{DSB-SC}}(t) = kA_0 x(t) \cos \omega_0 t$$

Dla modulacji tonowej opisanej w zadaniu przybierze on postać:

$$\varphi_{\text{DSB-SC}}(t) = ka_m A_0 \cos \omega_m t \cos \omega_0 t$$

Korzystając z faktu, że moc sygnału sinusoidalnego równa jest połowie kwadratu amplitudy:

$$P_x = \frac{a_m^2}{2}$$

możemy znaleźć amplitudę sygnału modulującego:

$$a_m = \sqrt{2P_x} = 2 \text{ V}$$

Wiemy też, że moc sygnału DSB-SC z modulacją tonową wynosi:

$$P_{\text{DSB-SC}} = \frac{k^2 a_m^2 A_0^2}{4}$$

Na podstawie powyższej zależności można wyliczyć:

$$A_0 = \frac{2\sqrt{P_{\text{DSB-SC}}}}{ka_m} = 8 \text{ V}$$

Dla zapisu pełnej postaci czasowej sygnału DSB-SC wymagana jest również znajomość częstotliwości sygnału modulującego. Ponieważ szerokość pasma sygnału zmodulowanego DSB-SC:

$$B_{\text{DSB-SC}} = 2f_m$$

zatem częstotliwość sygnału modulującego wynosi:

$$f_m = 5 \text{ kHz}$$

Uwzględniając wyznaczone parametry można zapisać:

$$\varphi_{\text{DSB-SC}}(t) = 4 \cos(2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 t) \cos(2\pi \cdot 10^5 t)$$

Przystępujemy do wyznaczenia widma sygnału zmodulowanego. W tym celu posłużymy się następującymi wzorami pozwalającymi wyznaczyć transformatę Fouriera:

$$\begin{aligned} \cos \omega_m t &\leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_m)] \\ x(t) \cos \omega_0 t &\leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \\ ax(t) &\leftrightarrow aX(\omega) \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe zależności dla sygnału zmodulowanego $\varphi_{\text{DSB-SC}}(t)$:

$$\Phi_{\text{DSB-SC}}(\omega) = F\{\varphi_{\text{DSB-SC}}(t)\} = 4F\{\cos \omega_m t \cos \omega_0 t\}$$

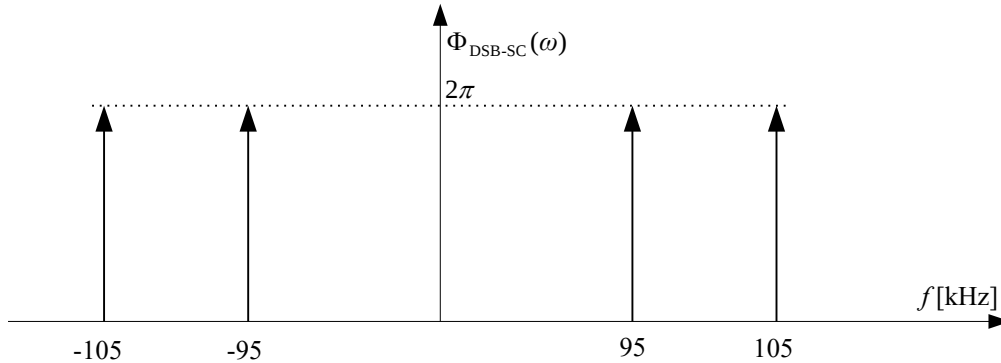
czyli transformata Fouriera sygnału zmodulowanego $\varphi_{\text{DSB-SC}}(t)$:

$$\Phi_{\text{DSB-SC}}(\omega) = 2\pi \delta \left[\begin{aligned} &(\omega - \omega_0 - \omega_m) + \delta(\omega - \omega_0 + \omega_m) + \\ &+ \delta(\omega + \omega_0 - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_0 + \omega_m) \end{aligned} \right]$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy wynik:

$$\Phi_{\text{DSB-SC}}(\omega) = 2\pi \left[\begin{aligned} &\delta(\omega - 2\pi \cdot 105 \cdot 10^3) + \delta(\omega - 2\pi \cdot 95 \cdot 10^3) + \\ &+ \delta(\omega + 2\pi \cdot 95 \cdot 10^3) + \delta(\omega + 2\pi \cdot 105 \cdot 10^3) \end{aligned} \right]$$

Widmo $\Phi_{\text{DSB-SC}}(\omega)$ sygnału zmodulowanego $\varphi_{\text{DSB-SC}}(t)$ przedstawiono na rysunku R.4:



Rysunek R.4

Rozwiązanie 1.1.11

Ad. a)

Sygnał tonowej modulacji AM jest opisany zależnością:

$$\varphi_{\text{AM}}(t) = A_0(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$$

Z wykresu odczytujemy, że $f_0 = 10$ kHz, natomiast $f_m = 1$ kHz.

Przystępujemy do wyznaczenia amplitudy fali nośnej A_0 . Korzystamy tutaj z następującej ogólnej zależności określającej moc sygnału:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

gdzie $S(\omega)$ oznacza widmo gęstości mocy analizowanego sygnału. Ponieważ rozpatrywane widmo posiada wartości dyskretne, całkowanie można zastąpić sumowaniem. Należy również przypomnieć wzór pozwalający obliczyć moc sygnału

zmodulowanego amplitudowo, uzależniony od współczynnika głębokości modulacji m oraz amplitudy fali nośnej A_0 :

$$P_{AM} = \frac{A_0^2}{2} + \frac{m^2 A_0^2}{4}$$

Korzystając z przedstawionych powyżej zależności możemy zapisać następujące równanie:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0} S(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0} S(\omega) d\omega = \frac{A_0^2}{2}$$

Rozwiązując równanie:

$$\frac{1}{2\pi} [2\pi + 2\pi] = \frac{A_0^2}{2}$$

otrzymujemy $A_0 = 2 \text{ V}$.

Porównując moc jednej ze wstęg bocznych wyznaczamy współczynnik głębokości modulacji:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-(\omega_0 + \omega_m)} S(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_0 + \omega_m} S(\omega) d\omega = \frac{m^2 A_0^2}{8}$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy $m = 0,6$. Zatem postać czasowa sygnału jest opisana zależnością:

$$\varphi_{AM}(t) = 2(1 + 0,6 \cos 2\pi \cdot 10^3 t) \cos 2\pi \cdot 10^4 t$$

Ad. b)

Moc całkowitą możemy obliczyć korzystając z zależności przedstawionych powyżej:

$$P_{AM} = \frac{1}{2\pi} [4 \cdot 0,18\pi + 2 \cdot 2\pi] = 2,36 \text{ W}$$

Moc wstęg bocznych to różnica mocy całkowitej i mocy fali nośnej:

$$P_N = \frac{A_0^2}{2} = 2 \text{ W}$$

$$P_B = P_{AM} - P_N = 0,36 \text{ W}$$

Współczynnik sprawności energetycznej μ zdefiniowany jest jako stosunek mocy wstęg bocznych do mocy sygnału zmodulowanego:

$$\mu_{AM} = \frac{P_B}{P_{AM}}$$

Podstawiając wcześniej wyznaczone wartości mocy otrzymujemy poszukiwaną wartość współczynnika sprawności energetycznej $\mu_{AM} \approx 0,15$.

Rozwiązanie 1.1.12

Z analizy rysunku 1.4 wynika, że:

$$y(t) = \frac{E}{R(t) + R} R - \frac{E}{2}$$

Po krótkich przekształceniach:

$$y(t) = \frac{2ER - ER(t) - ER}{2[R(t) + R]} = \frac{E[R - R(t)]}{2[R(t) + R]}$$

Uwzględniając, że $R(t) = R[1 + \alpha x(t)]$, można zapisać:

$$y(t) = \frac{E}{2} \cdot \frac{-\alpha R x(t)}{2R[2 + \alpha x(t)]}$$

Ponieważ z założenia $|\alpha x(t)| = \alpha |x(t)| \ll 1$, zatem:

$$y(t) = \frac{-\alpha A_0}{4} x(t) \cos \omega_0 t$$

Z postaci sygnału $y(t)$ wnioskujemy, że jest to sygnał modulacji DSB-SC.

Rozwiązanie 1.1.13

Wzór na moc sygnału modulacji AM w przypadku, gdy sygnałem modulującym jest dowolny sygnał, przybiera następującą postać:

$$P_{AM} = \frac{1}{2} A_0^2 + \frac{1}{2} k^2 A_0^2 \overline{x^2} = \frac{1}{2} A_0^2 (1 + k^2 \overline{x^2}) = P_N (1 + k^2 \overline{x^2})$$

Dla sygnału harmonicznego:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2} a_m^2$$

a zatem:

$$P_{AM} = P_N \left(1 + \frac{k^2 a_m^2}{2} \right) = P_N \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

Korzystając z danych P_N i P_{AM} wyznaczamy współczynnik głębokości modulacji m :

$$1 + \frac{m^2}{2} = \frac{P_{AM}}{P_N} = \frac{4,2}{3} = 1,4$$

a zatem $m \approx 0,9$. Sprawność energetyczna modulacji AM dla sygnału harmonicznego wyraża się wzorem:

$$\mu_{AM} = \frac{m^2}{m^2 + 2}$$

tak więc $\mu_{AM} \approx 0,29$.

Rozważymy teraz sygnał o trójkątnej funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Dla tego sygnału jego maksymalna wartość powiązana jest z wartością średniokwadratową przez współczynnik szczytu c w następujący sposób:

$$|x|_{\max} = a = c \sqrt{\overline{x^2}}$$

Wyznamy teraz sprawność energetyczną sygnału trójkątnego:

$$\mu_{\Delta} = \frac{P_B}{P_N + P_B} = \frac{k^2 \overline{x^2}}{1 + k^2 \overline{x^2}} = \frac{k^2 \frac{a^2}{c^2}}{1 + k^2 \frac{a^2}{c^2}} = \frac{k^2 a^2}{c^2 + k^2 a^2} = \frac{m^2}{c^2 + m^2}$$

Ponieważ współczynnik głębokości modulacji pozostaje taki sam, wobec tego:

$$\mu_{\Delta} = \frac{m^2}{c^2 + m^2} = \frac{0,8}{c^2 + 0,8}$$

Pozostaje zatem jeszcze wyznaczyć współczynnik szczytu c . Korzystamy tutaj z następujących zależności:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

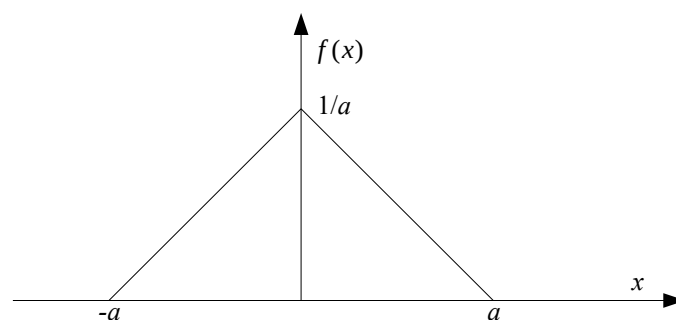
Z pierwszej zależności wyznaczamy wartość rozkładu prawdopodobieństwa dla $x = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot f(0) = 1$$

a zatem:

$$f(0) = \frac{1}{a}$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla rozważanego sygnału wraz z wyznaczonymi wartościami amplitudy została przedstawiona na rysunku R.5.



Rysunek R.5

Wyznaczamy funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{a} + \frac{x}{a^2}, & x < 0 \end{cases}$$

Druga zależność posłuży nam do wyznaczenia parametru c :

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = 2 \int_{-a}^a x^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} \right) dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2 (a - x) dx = \frac{2}{a^2} \left[\frac{1}{3} ax^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^a = \frac{a^2}{6}$$

Porównując otrzymany wynik ze wzorem na amplitudę analizowanego sygnału otrzymujemy:

$$c^2 = 6$$

Podstawiając tę wartość do wzoru na sprawność energetyczną modulacji otrzymujemy:

$$\mu_{\Delta} = \frac{0,8}{6,8} \approx 0,12$$

Stosunek sprawności energetycznych modulacji dla analizowanych sygnałów:

$$\frac{\mu_{AM}}{\mu_{\Delta}} = 2,4$$

Sprawność energetyczna modulacji tonowej jest 2,4 razy lepsza w porównaniu do sytuacji, gdy sygnałem modulującym jest sygnał o trójkątnym rozkładzie funkcji gęstości prawdopodobieństwa.

Rozwiązanie 1.1.14

Sposób wyznaczania widma sygnału DSB-SC został przedstawiony w zadaniu 1.1.10. Wzór na transformatę Fouriera sygnału sinusoidalnego dany jest zależnością:

$$\sin \omega_m t \leftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_m) - \delta(\omega - \omega_m)]$$

Widmo rozważanego sygnału DSB-SC przyjmuje postać:

$$\Phi_{\text{DSB-SC}}(\omega) = \frac{j\pi a_m}{2} [\delta(\omega + \omega_0 + \omega_m) - \delta(\omega - \omega_0 - \omega_m) + \delta(\omega - \omega_0 + \omega_m) - \delta(\omega + \omega_0 - \omega_m)]$$

a po podstawieniu wartości liczbowych:

$$\Phi_{\text{DSB-SC}}(\omega) = j5\pi [\delta(\omega + 1,02 \cdot 10^6) - \delta(\omega - 1,02 \cdot 10^6) + \delta(\omega - 0,98 \cdot 10^6) - \delta(\omega + 0,98 \cdot 10^6)]$$

W celu wyznaczenia widma sygnału wyjściowego filtru należy pomnożyć widmo sygnału $\Phi_{\text{DSB-SC}}(\omega)$ przez transmitancję filtru $H(\omega)$. Z rysunku 1.6 można odczytać, że dla pulsacji $\pm 0,98$ Mrad/s transmitancja przyjmuje wartość 0,8, zaś dla pulsacji $\pm 1,02$ Mrad/s wartość równą 1. Na wyjściu filtru otrzymamy zatem sygnał VSB o widmie opisanym następującą zależnością:

$$\Phi_{\text{VSB}}(\omega) = j5\pi [\delta(\omega + 1,02 \cdot 10^6) - \delta(\omega - 1,02 \cdot 10^6)] - j4\pi [\delta(\omega + 0,98 \cdot 10^6) - \delta(\omega - 0,98 \cdot 10^6)]$$

któremu odpowiada przebieg czasowy:

$$\varphi_{\text{VSB}}(t) = 5 \sin(1,02 \cdot 10^6 t) - 4 \sin(0,98 \cdot 10^6 t)$$

Rozwiązanie 1.1.15

Analizując widmo sygnału przedstawionego na rysunku 1.7 stwierdzamy, że jest to widmo tonowej modulacji DSB-SC. Dla modulacji tonowej DSB-SC postać czasowa opisana jest zależnością:

$$\varphi_{\text{DSB-SC}}(t) = k a_m A_0 \cos \omega_m t \cos \omega_0 t$$

Korzystając z faktu, że moc sygnału sinusoidalnego równa jest połowie kwadratu amplitudy:

$$P_x = \frac{a_m^2}{2}$$

wyznaczamy amplitudę sygnału modulującego:

$$a_m = \sqrt{2P_x} = 2 \text{ V}$$

Transformata Fouriera sygnału zmodulowanego $\varphi_{\text{DSB-SC}}(t)$ dana jest zależnością:

$$\Phi_{\text{DSB-SC}}(\omega) = \frac{k a_m A_0 \pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0 - \omega_m) + \delta(\omega - \omega_0 + \omega_m) + \delta(\omega + \omega_0 - \omega_m) + \delta(\omega + \omega_0 + \omega_m)]$$

Porównując amplitudy prążków przedstawione na rysunku 1.8, możemy zapisać:

$$\frac{k a_m A_0 \pi}{2} = 2\pi$$

Ponieważ iloczyn $k a_m = m = 1/2$, zatem $A_0 = 8 \text{ V}$. Z wykresu odczytujemy ponadto, że $f_m = 20 \text{ kHz}$ oraz $f_0 = 200 \text{ kHz}$. Uwzględniając wyznaczone wartości można zapisać postać czasową sygnału:

$$\varphi_{\text{DSB-SC}}(t) = 4 \cos(2\pi \cdot 20 \cdot 10^3 t) \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^5 t)$$

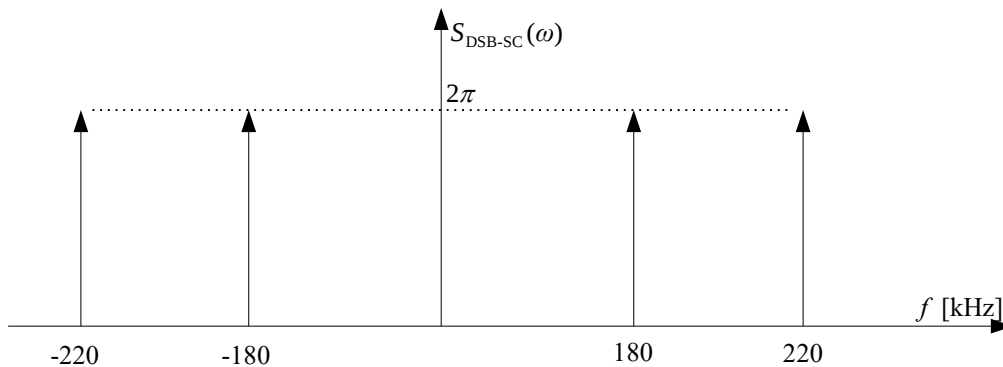
Moc sygnału zmodulowanego DSB-SC:

$$P_{\text{DSB-SC}} = \frac{m^2 A_0^2}{4} = 4 \text{ W}$$

Przystępujemy do wyznaczenia widma gęstości mocy sygnału zmodulowanego. W tym celu posłużymy się wzorem wiążącym moc sygnału z jego widmem gęstości mocy:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega$$

Korzystając z powyższej zależności dla sygnału tonowej modulacji DSB-SC wyznaczamy jej widmo gęstości mocy przedstawione na rysunku R.6.



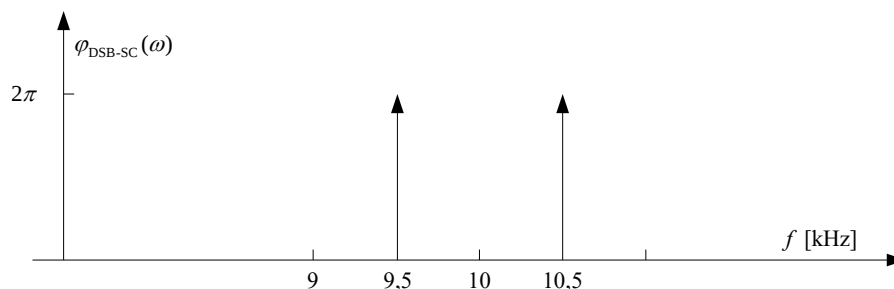
Rysunek R.6

Rozwiązanie 1.1.16

Zapiszmy postać czasową sygnału zmodulowanego DSB-SC:

$$\varphi_{\text{DSB-SC}}(t) = 4 \cos 2\pi \cdot 500 t \cos 2\pi \cdot 10^4 t$$

W kolejnym kroku wyznaczamy transformatę Fouriera sygnału $\varphi_{\text{DSB-SC}}(t)$. Widmo tego sygnału przedstawiono na rysunku R.7.

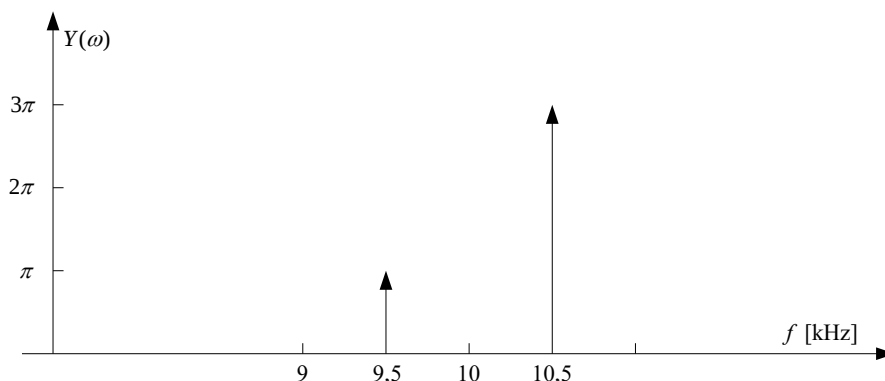


Rysunek R.7

Korzystając z zależności wiążącej sygnał wyjściowy filtru z transmitancją sygnału wejściowego poprzez transmitancję filtru $H(\omega)$:

$$Y(\omega) = \Phi_{\text{DSB-SC}}(\omega)H(\omega)$$

wyznaczamy widmo sygnału wyjściowego filtru pokazane na rysunku R.8.



Rysunek R.8

Obliczając na podstawie znajomości widma sygnału odwrotną transformatę Fouriera otrzymujemy postać czasową sygnału wyjściowego filtru:

$$y(t) = \cos 2\pi \cdot 9,5 \cdot 10^3 t + \cos 2\pi \cdot 10,5 \cdot 10^3 t$$

Sygnał ten nie jest sygnałem DSB-SC, gdyż widmo sygnału DSB-SC jest symetryczne względem częstotliwości nośnej. W analizowanym przypadku warunek symetrii widma nie jest spełniony.

Rozwiązanie 1.1.17

Korzystając z założenia o symetrii możemy zapisać transmitancję filtru pasmowoprzepustowego w postaci:

$$H(\omega) = A(\omega - \omega_0) + A(\omega + \omega_0)$$

gdzie $A(\omega)$ jest transmitancją pewnego filtru dolnoprzepustowego.

Wyznaczamy transformatę Fouriera sygnału wyjściowego dla przypadku filtracji pasmowoprzepustowej (po modulacji); w obliczeniach korzystamy ze spostrzeżenia, że niektóre składniki widma leżą w rozdzielnych pasmach częstotliwości.

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{2} H(\omega) [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] = \\ &= \frac{1}{2} [A(\omega - \omega_0) + A(\omega + \omega_0)] [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] = \\ &= \frac{1}{2} [A(\omega - \omega_0)X(\omega - \omega_0) + A(\omega + \omega_0)X(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

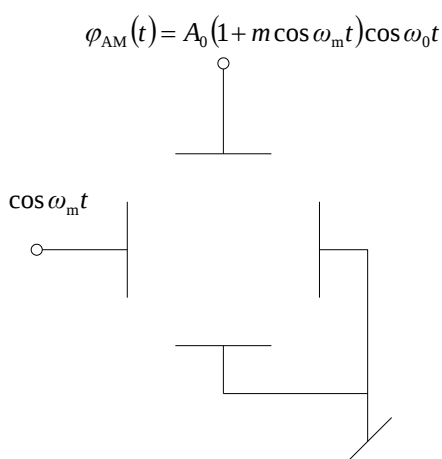
Podobnie postępujemy dla przypadku filtracji dolnoprzepustowej (przed modulacją):

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0)D(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)D(\omega + \omega_0)]$$

Stwierdzamy zatem, że filtracja sygnału zmodulowanego amplitudowo może być zastąpiona (jest równoważna) filtracją dolnopasmową sygnału modulującego, o ile tylko transmitancja filtru pasmowego jest symetryczna.

Rozwiązanie 1.1.18

Na rysunku R.9 przedstawiono sposób podłączenia rozważanych sygnałów, tj. sygnału modulującego oraz sygnału zmodulowanego AM, odpowiednio do płytek odchylania poziomego oraz pionowego oscyloskopu:



Rysunek R.9

Ad. a)

W celu wyznaczenia obrazu, który ukaże się na ekranie oscyloskopu po podłączeniu sygnałów jak na rysunku R.9, przedstawimy te sygnały w układzie współrzędnych (x, y) . W przypadku górnej obwiedni sygnału zmodulowanego AM możemy zapisać następujący układ równań:

$$\begin{cases} x(t) = \cos \omega_m t \\ y(t) = A_0 + A_0 m \cos \omega_m t \end{cases}$$

Zatem równanie górnej obwiedni sygnału AM przyjmuje postać:

$$y(x) = A_0 + A_0 m x$$

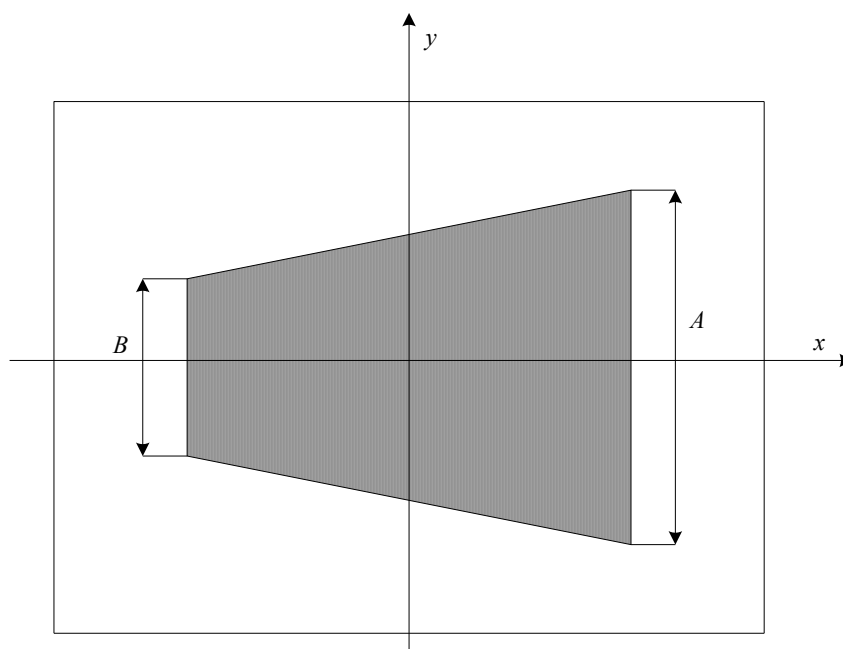
W przypadku dolnej obwiedni sygnału zmodulowanego AM układ równań ma następującą postać:

$$\begin{cases} x(t) = \cos \omega_m t \\ y(t) = -A_0 - A_0 m \cos \omega_m t \end{cases}$$

Zatem równanie dolnej obwiedni sygnału AM jest opisane zależnością:

$$y(x) = -A_0 - A_0 m x$$

W pionie plamka na ekranie będzie poruszała się ruchem harmonicznym o dużej częstotliwości lecz zmiennej amplitudzie; w poziomie ruchem harmonicznym o dużo mniejszej częstotliwości ($\omega_0 \gg \omega_m$) i stałej amplitudzie. Obraz, który ukaże się na ekranie, będzie ograniczony w pionie wyznaczonymi obwiedniami sygnału zmodulowanego AM (opisanymi funkcjami liniowymi), natomiast w poziomie wartościami maksymalnymi sygnału modulującego. Na ekranie oscyloskopu ukaże się zatem trapez pokazany na rysunku R.10.



Rysunek R.10

Ad. b)

Korzystając z oznaczeń na rysunku R.10 możemy zapisać następujące zależności:

$$\begin{cases} A = 2A_0(1 + m) \\ B = 2A_0(1 - m) \end{cases}$$

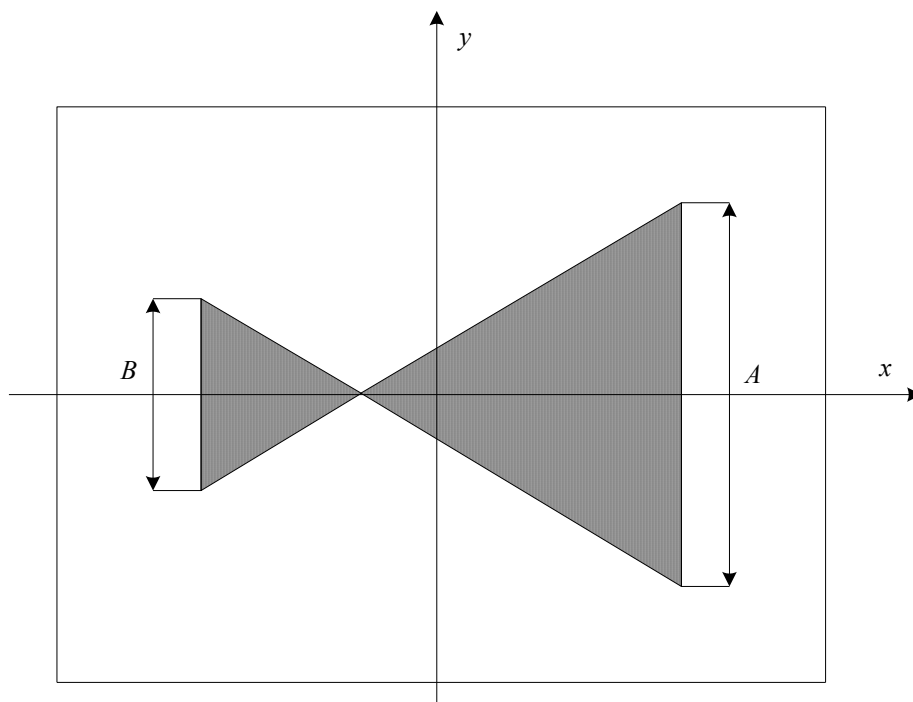
Rozwiązując ten układ równań względem m otrzymujemy następujący wzór:

$$m = \frac{A - B}{A + B}$$

Stwierdzamy zatem, że mierząc długości boków trapezu możemy wyznaczyć współczynnik głębokości modulacji.

Ad. c)

Rozpatrzmy przypadek, gdy $m > 1$, a więc gdy występuje przemodulowanie. Przeprowadzając podobną analizę jak w punkcie a) uzyskamy zależności opisujące dolną i górną obwiednię sygnału zmodulowanego AM, które pozwolą stwierdzić, że na ekranie oscyloskopu pojawi się figura przedstawiona na rysunku R.11:



Rysunek R.11

Korzystając z oznaczeń wprowadzonych na rysunku R.11 możemy zapisać następujące zależności:

$$\begin{cases} A = 2A_0(m+1) \\ B = 2A_0(m-1) \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań względem m otrzymujemy wzór:

$$m = \frac{A+B}{A-B}$$

Uzyskana zależność pozwala wnioskować, że również w przypadku przemodulowania możliwe jest wyznaczenie współczynnika głębokości modulacji poprzez pomiar rozmiarów geometrycznych obrazu, który ukazuje się na ekranie oscyloskopu.

Rozwiązanie 1.1.19

Ad. a)

Sprawność energetyczna dla tonowej modulacji AM wyraża się wzorem:

$$\mu_{AM} = \frac{m^2}{2+m^2}$$

Z rozwiązania zadania 1.1.18 wynika, że:

$$m = \frac{A-B}{A+B}$$

Wstawiając wartości z rysunku 1.11 do powyższego wzoru otrzymujemy, że $m = 1/2$, a zatem $\mu_{AM} = 1/9$.

Ad b)

Moc sygnału modulującego:

$$P_x = \frac{a_m^2}{2} = \frac{1}{2}$$

a zatem jego amplituda:

$$a_m = 1$$

Ponieważ wartość międzyszczytowa wynosi $2a_m$, dlatego też można określić rozdzielczość poziomą oscyloskopu:

$$C_x = \frac{2 \text{ V}}{4 \text{ cm}} = 0,5 \text{ V/cm}$$

Moc sygnału zmodulowanego AM jest równa:

$$P_{AM} = \frac{A_0^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

skąd wyznaczamy amplitudę sygnału nośnego:

$$A_0 = 2 \text{ V}$$

Na podstawie wartości przedstawionych na rysunku 1.11 oraz zależności wyprowadzonych w zadaniu 1.1.18 można zapisać równanie:

$$3C_y = 2A_0(1+m)$$

a zatem rozdzielczość pionowa oscyloskopu:

$$C_y = 2 \text{ V/cm}$$

Ad. c)

W celu wyznaczenia postaci czasowej sygnału zmodulowanego AM oprócz parametrów danych w zadaniu oraz parametrów wyznaczonych w poprzednich podpunktach, konieczna jest również znajomość częstotliwości sygnału modulującego. Ponieważ znamy szerokość pasma sygnału zmodulowanego AM, tak więc:

$$B_{AM} = 2f_m$$

skąd wyznaczamy szukaną wartość:

$$f_m = 5 \text{ kHz}$$

Postać czasowa sygnału zmodulowanego AM, opisana ogólnym wzorem:

$$\varphi_{AM}(t) = A_0(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$$

w tym zadaniu przyjmie postać:

$$\varphi_{AM}(t) = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 t \right) \cos 2\pi \cdot 10^5 t$$

Rozwiązanie 1.1.20

Sygnał zmodulowany AM dany jest następującą zależnością:

$$\varphi_{AM}(t) = A_0(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$$

Po uwzględnieniu przesunięcia sygnału modulującego względem obwiedni o kąt φ możemy zapisać zależność określającą górną krawędź trapezu:

$$\begin{cases} x(t) = a_m \cos(\omega_m t + \varphi) \\ y(t) = A_0 \cos(1 + m \cos \omega_m t) \end{cases}$$

Równanie dolnej krawędzi trapezu przyjmie następującą postać:

$$\begin{cases} x(t) = a_m \cos(\omega_m t + \varphi) \\ y(t) = -A_0 \cos(1 + m \cos \omega_m t) \end{cases}$$

Przesunięcie fazowe φ jest małe, a zatem można przyjąć następującą przybliżenie:

$$\cos \varphi \approx 1, \sin \varphi \approx \varphi$$

wtedy:

$$x(t) = a_m \cos \omega_m t \cos \varphi - a_m \sin \omega_m t \sin \varphi \approx a_m \cos \omega_m t - a_m \varphi \sin \omega_m t$$

wówczas:

$$\begin{cases} \frac{x}{a_m} = x' = \cos \omega_m t - \varphi \sin \omega_m t \\ \frac{1}{m} \left(\frac{y}{A_0} - 1 \right) = y' = \cos \omega_m t \end{cases}$$

a zatem:

$$\begin{cases} x' = y' - \varphi \sin \omega_m t \\ y' = \cos \omega_m t \end{cases}$$

czyli:

$$\begin{cases} \frac{y' - x'}{\varphi} = \sin \omega_m t \\ y' = \cos \omega_m t \end{cases}$$

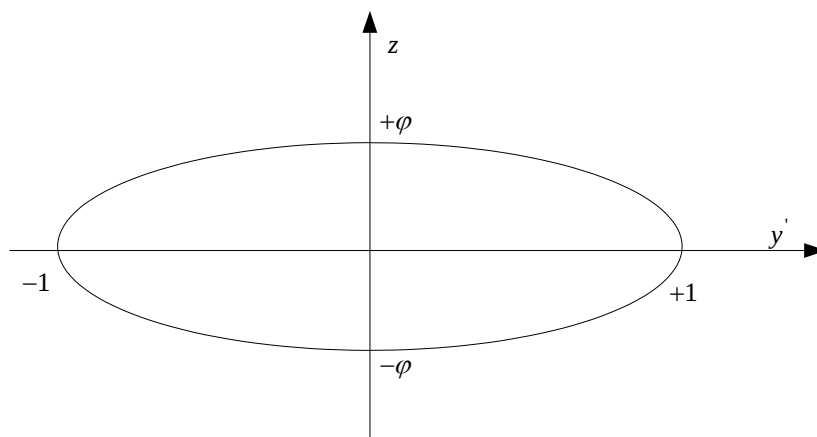
Niech $z = y' - x'$, wówczas:

$$\begin{cases} \frac{z}{\varphi} = \sin \omega_m t \\ y' = \cos \omega_m t \end{cases}$$

Jest to parametryczne równanie elipsy w układzie współrzędnych (y', z) , gdyż:

$$\frac{z^2}{\varphi^2} + (y')^2 = 1$$

Elipsa została przedstawiona na rysunku R.12.

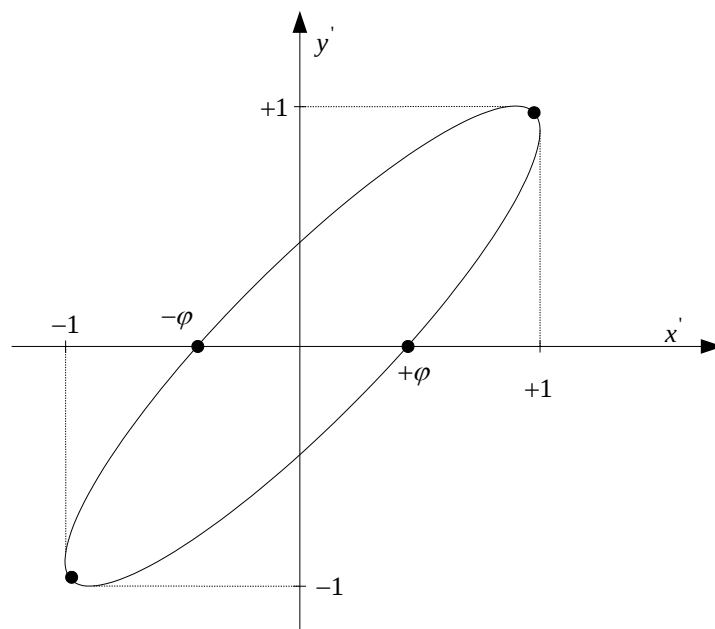


Rysunek R.12

Uwzględnijmy teraz, że:

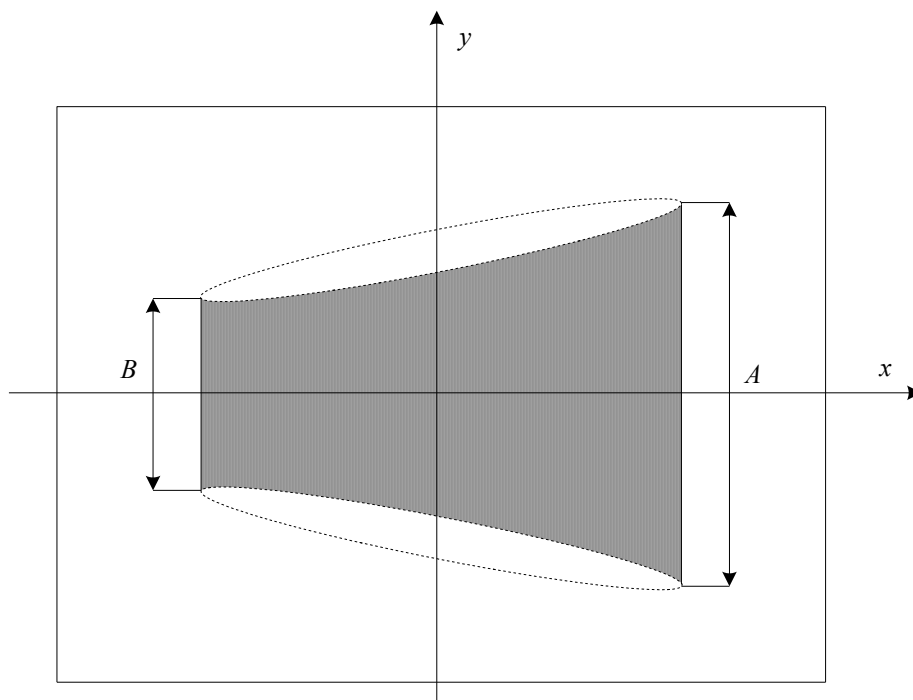
$$z = y' - x' \Rightarrow x' = y' - z$$

Po wyznaczeniu x' uzyskujemy zależność $y'(x')$. Zależność ta została przedstawiona na rysunku R.13.



Rysunek R.13

Analizując kształt uzyskanej figury przedstawionej na rysunku R.13 stwierdzamy, że górna i dolna krawędź trapezu przechodzi w elipsę. Na rysunku R.14 pokazano obraz, który ukaże się na ekranie oscyloskopu. W zależności od znaku kąta odchylenia sygnału modulującego względem obwiedni (dodatni lub ujemny), funkcja opisująca górną obwiednię będzie wklęsła (znak dodatni) lub wypukła (znak ujemny). Odwrotna sytuacja będzie miała miejsce w przypadku dolnej obwiedni, tj. funkcja opisująca dolną obwiednię będzie wklęsła (znak ujemny) lub wypukła (znak dodatni).



Rysunek R.14

W zadaniu założyliśmy, że:

$$\frac{1}{m} \left(\frac{y}{A_0} - 1 \right) = y' = \cos \omega_m t$$

Wyznamy zatem wartość sygnału zmodulowanego w sytuacji, gdy $y' = \cos \omega_m t = 1$:

$$\frac{1}{m} \left(\frac{y}{A_0} - 1 \right) = 1$$

po przekształceniu:

$$\frac{y}{A_0} - 1 = m$$

a zatem wartość sygnału zmodulowanego opisana jest zależnością:

$$y = A_0(1 + m)$$

Podobną analizę przeprowadzamy dla przypadku, gdy $y' = \cos \omega_m t = -1$, czyli:

$$\frac{1}{m} \left(\frac{y}{A_0} - 1 \right) = -1$$

po przekształceniu:

$$\frac{y}{A_0} - 1 = -m$$

W efekcie otrzymujemy zależność:

$$y = A_0(1 - m)$$

Na podstawie otrzymanych wartości stwierdzamy, że poprawne pomiary współczynnika głębokości modulacji można przeprowadzić również w analizowanym

przypadku. Wartość poszukiwanego współczynnika wyznaczamy (podobnie jak w zadaniu 1.1.18) ze wzoru:

$$m = \frac{A - B}{A + B}$$

Stwierdzamy, że mierząc odpowiednie boki figury, która ukaże się na ekranie oscyloskopu, możemy wyznaczyć współczynnik głębokości modulacji.

Rozwiązanie 1.1.21

Sygnał tonowej modulacji AM dany jest następującym wzorem:

$$\varphi_{AM}(t) = A_0(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t$$

Po skorzystaniu ze wzorów trygonometrycznych można go zapisać jako:

$$\varphi_{AM}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m A_0 \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{1}{2} m A_0 \cos(\omega_0 + \omega_m)t$$

Sygnał AM o częstotliwościach przesuniętych w fazie o $-\pi/2$ przyjmuje postać:

$$\hat{\varphi}_{AM}(t) = A_0 \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} m A_0 \sin(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{1}{2} m A_0 \sin(\omega_0 + \omega_m)t$$

Po krótkim przekształceniu uzyskujemy następującą zależność:

$$\hat{\varphi}_{AM}(t) = A_0(1 + m \cos \omega_m t) \sin \omega_0 t$$

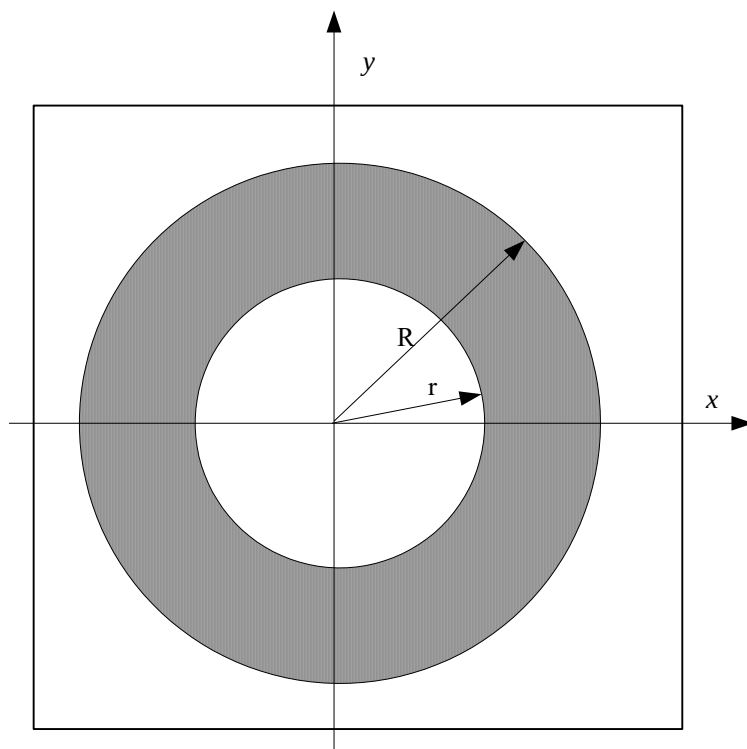
Powstaje zatem układ równań:

$$\begin{cases} x = A_0(1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_0 t \\ y = A_0(1 + m \cos \omega_m t) \sin \omega_0 t \end{cases}$$

Po podniesieniu obydwóch stron powyższego układu do kwadratu i ich zsumowaniu otrzymujemy:

$$x^2 + y^2 = A_0^2(1 + m \cos \omega_m t)^2$$

Powyższa zależność opisuje równanie okręgu, którego promień będzie się zmieniał w granicach od $A_0(1 - m)$ do $A_0(1 + m)$. Ponieważ $\omega_m \ll \omega_0$, zatem na ekranie tak naprawdę zobaczymy pierścień (stąd też nazwa metody – metoda pierścieniowa), który został przedstawiony na rysunku R.15.



Rysunek R.15

Korzystając z oznaczeń wprowadzonych na rysunku R.15 możemy zapisać następujący układ równań:

$$\begin{cases} r = A_0(1 - m) \\ R = A_0(1 + m) \end{cases}$$

a po przekształceniach:

$$\begin{cases} R + r = 2A_0 \\ R - r = 2mA_0 \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy poszukiwany współczynnik głębokości modulacji:

$$m = \frac{R - r}{R + r}$$

Metoda pierścieniowa (podobnie jak metoda trapezowa) również umożliwia wyznaczenie współczynnika głębokości modulacji poprzez pomiar rozmiarów geometrycznych obrazu, który ukaże się na ekranie oscyloskopu.

Rozwiązanie 1.1.22

Ad. a)

Z treści zadania wynika, że tangens kąta fazowego, równy rozstrojeniu bezwzględnemu obwodu rezonansowego ξ , wynosi:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \xi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Z kolei dobroć obwodu rezonansowego (po uwzględnieniu założenia $f_0 \gg f_m$) wyraża się następującym wzorem:

$$Q \approx \frac{\xi f_0}{2 f_m}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych:

$$Q = 50\sqrt{3}$$

Ad. b)

W celu obliczenia indukcyjności cewki znajdującej się w obwodzie rezonansowym skorzystamy ze wzoru:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

z którego wyznaczamy poszukiwaną indukcyjność $L = 0,5 \text{ mH}$. Rezystancję obwodu wyznaczamy następująco:

$$R = \frac{\omega_0 L}{Q} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Omega$$

W zadaniu należy wyznaczyć ponadto współczynnik głębokości modulacji sygnału prądowego. Zapiszmy zatem postać czasową sygnału napięciowego:

$$u_{AM}(t) = 100 \left(1 + \frac{1}{2} \cos 10^4 t \right) \cos 10^6 t$$

z którego wnioskujemy, że $m = 1/2$.

Dla sygnału prądowego (stosując prawo Ohma i uwzględniając, że dla różnych częstotliwości wartość impedancji układu będzie różna) otrzymujemy:

$$i_{AM}(t) = 100 \left(\frac{1}{|Z(f_0)|} + \frac{m}{|Z(f_0 + f_m)|} \cos 10^4 t \right) \cos 10^6 t$$

Ponieważ impedancja dla częstotliwości rezonansowej wynosi R , zatem:

$$i_{AM}(t) = \frac{100}{R} \left(1 + \frac{mR}{|Z(f_0 + f_m)|} \cos 10^4 t \right) \cos 10^6 t$$

gdzie:

$$|Z(f_0 + f_m)| = |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = R\sqrt{1 + \xi^2}$$

Dla obwodu RLC obowiązuje zależność:

$$\cos \varphi = \frac{R}{|Z|}$$

wobec czego:

$$m_i = \frac{mR}{|Z(f_0 + f_m)|} = \frac{mR}{|Z|} = m \cos \varphi = 0,25$$

Rozwiązanie 1.1.23

Amplituda napięciowego sygnału nośnego wynosi A_0 , natomiast amplitudy prążków bocznych wynoszą $mA_0/2$, zatem dla sygnału napięciowego stosunek amplitudy fal bocznych do amplitudy fali nośnej równy jest $m/2$. W celu wyznaczenia podobnej zależności dla sygnału prądowego należy uwzględnić fakt, że analizowany obwód jest obwodem rezonansowym, dostrojonym do częstotliwości sygnału nośnego. Wówczas dla sygnału prądowego amplituda sygnału nośnego wynosi A_0/R , natomiast amplituda prążków bocznych dana jest zależnością:

$$\frac{mA_0}{2|Z|} = \frac{mA_0}{2R\sqrt{1+\xi^2}}$$

gdzie:

$$\xi = \frac{X}{R}$$

jest rozstrojeniem bezwzględnym obwodu rezonansowego. Zatem dla sygnału prądowego stosunek amplitudy fal bocznych do amplitudy sygnału nośnego przyjmuje postać:

$$\frac{m}{2\sqrt{1+\xi^2}}$$

Wobec tego szukany stosunek amplitudy fal bocznych do amplitudy sygnału nośnego w sygnale napięciowym $u_{AM}(t)$ do stosunku amplitudy fal bocznych do amplitudy sygnału nośnego w sygnale prądowym $i_{AM}(t)$ można zapisać jako:

$$\frac{m}{2\sqrt{1+\xi^2}} \bigg/ \frac{m}{2}$$

Uwzględniając wymagania postawione w zadaniu, po przeliczeniu 3 dB na skalę liniową (dla napięć a nie dla mocy), warunek amplitudowy przyjmie postać:

$$\frac{\frac{m}{2\sqrt{1+\xi^2}}}{\frac{m}{2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |\xi| < 1$$

Korzystając ze wzoru:

$$Q = \frac{\xi f_0}{2\Delta f}$$

otrzymujemy $Q_{\min} = 500$.

Rozwiązanie 1.1.24

Po przemnożeniu sygnału modulującego przez zniekształcony sygnał nośny sygnał wynikowy opisany jest następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = x(t)c(t) &= x(t)\cos^3 \omega_0 t = \frac{1}{2} x(t)\cos \omega_0 t (1 + \cos 2\omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{2} x(t)\cos \omega_0 t + \frac{1}{2} x(t)\cos \omega_0 t \cos 2\omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2} x(t)\cos \omega_0 t + \frac{1}{4} x(t)\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{4} x(t)\cos \omega_0 t = \\ &= \frac{3}{4} x(t)\cos \omega_0 t + \frac{1}{4} x(t)\cos 3\omega_0 t \end{aligned}$$

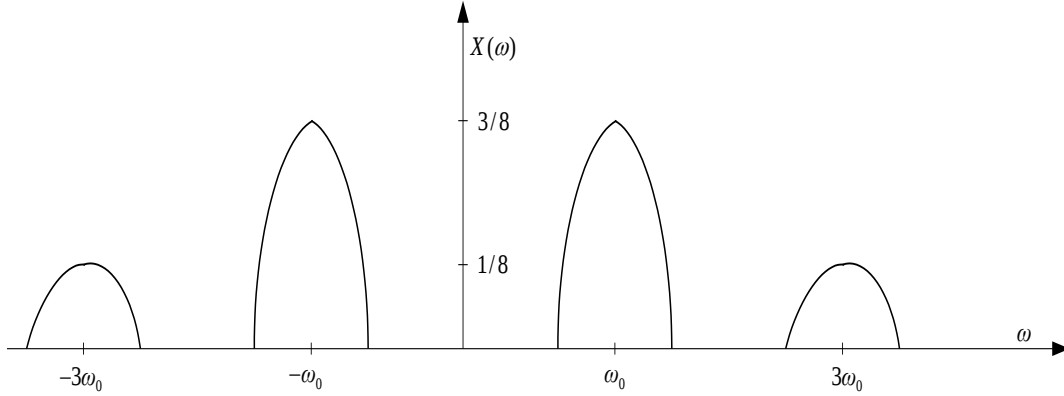
Aby wyznaczyć widmo powyższego sygnału skorzystamy z właściwości przekształcenia Fouriera:

$$x(t)\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)]$$

Widmo rozważanego sygnału opisane zależnością:

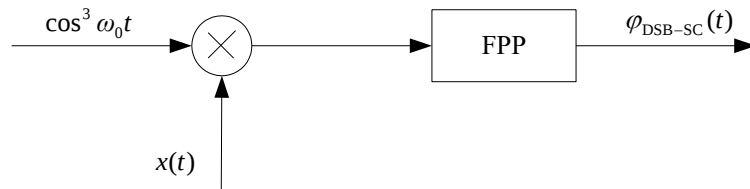
$$\Phi(\omega) = \frac{3}{8}[X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{8}[X(\omega + 3\omega_0) + X(\omega - 3\omega_0)]$$

zostało pokazane na rysunku R.16:



Rysunek R.16

Aby z sygnału o widmie przedstawionym na rysunku R.16 otrzymać sygnał DSB-SC, należy odfiltrować składowe sygnału znajdujące się wokół potrójnej częstotliwości nośnej. Schemat blokowy układu zapewniającego otrzymanie sygnału DSB-SC przy zniekształconym sygnale nośnym jest przedstawiony na rysunku R.17.



Rysunek R.17

Rozwiązanie 1.1.25

Sygnał tonowej modulacji fazy dany jest następującym wzorem:

$$\varphi_1(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\Theta_{PM} \sin \omega_m t)$$

Z rysunku 1.12 wynika następująca postać sygnału wyjściowego $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A_0 [1 + m \cos \omega_m t] \cos(\omega_0 t + \Delta\Theta_{PM} \sin \omega_m t) = \\ &= A_0 [1 + m \cos \omega_m t] [\cos \omega_0 t \cos(\Delta\Theta_{PM} \sin \omega_m t) - \sin \omega_0 t \sin(\Delta\Theta_{PM} \sin \omega_m t)] \end{aligned}$$

Dla małej wartości argumentu x można przyjąć następujące przybliżenie:

$$\sin x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

Ponieważ z założenia $m = \Delta\Theta_{PM} \approx 0$, zatem można przyjąć, że:

$$\sin(\Delta\Theta_{PM} \sin \omega_m t) \approx \Delta\Theta_{PM} \sin \omega_m t$$

$$\cos(\Delta\Theta_{\text{PM}} \sin \omega_m t) \approx 1$$

Rozwiązując dalej, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= A_0 [1 + m \cos \omega_m t] [\cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t \Delta\Theta_{\text{PM}} \sin \omega_m t] = \\ &= A_0 [\cos \omega_0 t - \Delta\Theta_{\text{PM}} \sin \omega_0 t \sin \omega_m t + m \cos \omega_m t \cos \omega_0 t - m \cos \omega_m t \sin \omega_0 t \Delta\Theta_{\text{PM}} \sin \omega_m t]\end{aligned}$$

Ostatni składnik można pominąć, gdyż jest to mała drugiego rzędu. Otrzymujemy zatem następującą postać sygnału:

$$\varphi(t) = A_0 [\cos \omega_0 t - \Delta\Theta_{\text{PM}} \sin \omega_0 t \sin \omega_m t + m \cos \omega_m t \cos \omega_0 t] = A_0 \cos \omega_0 t + mA_0 \cos(\omega_0 + \omega_m)t$$

Wnioskujemy ze wzoru, że jest to sygnał modulacji jednowstęgowej SSB-LC⁺ z sygnałem nośnym i górną wstęgą boczną.

Rozwiązanie 1.1.26

Korzystając ze wzorów Eulera oraz zapisu sygnału zmodulowanego kątowno z wykorzystaniem funkcji Bessela, sygnał wejściowy filtru można zapisać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \text{Re} \left\{ A_0 \left[1 + m \frac{e^{j\omega_m t} + e^{-j\omega_m t}}{2} \right] e^{j\omega_0 t} e^{j\Delta\Theta_{\text{FM}} \sin \omega_m t} \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ A_0 \left[1 + m \frac{e^{j\omega_m t} + e^{-j\omega_m t}}{2} \right] e^{j\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\Delta\Theta_{\text{FM}}) e^{jn\omega_m t} \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ A_0 e^{j\omega_0 t} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\Delta\Theta_{\text{FM}}) e^{jn\omega_m t} + \frac{m}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\Delta\Theta_{\text{FM}}) e^{j(n+1)\omega_m t} + \frac{m}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\Delta\Theta_{\text{FM}}) e^{j(n-1)\omega_m t} \right] \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ A_0 e^{j\omega_0 t} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(J_n(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_{n-1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_{n+1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) \right) e^{jn\omega_m t} \right] \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ A_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(J_n(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_{n-1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_{n+1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) \right) e^{j(\omega_0 + n\omega_m)t} \right\}\end{aligned}$$

Ponieważ filtr pasmowoprzepustowy jest filtrem o częstotliwości środkowej ω_0 i szerokości pasma przepustowego $2\omega_m$, wytnie on zatem składowe sygnału leżące poza pasmem przepustowym. Po filtracji pozostanie więc prążek nośnej oraz dwa prążki boczne – górny i dolny. Sygnał ten zatem można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= A_0 \left(J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_{-1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_1(\Delta\Theta_{\text{FM}}) \right) \cos \omega_0 t + \\ &+ A_0 \left(J_1(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_2(\Delta\Theta_{\text{FM}}) \right) \cos(\omega_0 + \omega_m)t + \\ &+ A_0 \left(J_{-1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_{-2}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) \right) \cos(\omega_0 - \omega_m)t\end{aligned}$$

Sygnał wyjściowy filtru będzie sygnałem SSB-LC⁺ wtedy, gdy dolna wstęga zostanie wyeliminowana:

$$J_{-1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_{-2}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = 0$$

Korzystając z właściwości funkcji Bessela:

$$J_{-n}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = (-1)^n J_n(\Delta\Theta_{\text{FM}}), \quad n = 1, 2, \dots$$

powyższe równanie można zapisać jako:

$$J_{-1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} J_{-2}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = -J_1(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + \frac{m}{2} [J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + J_2(\Delta\Theta_{\text{FM}})] = 0$$

Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy:

$$m = \frac{2J_1(\Delta\Theta_{\text{FM}})}{J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + J_2(\Delta\Theta_{\text{FM}})}$$

Dla funkcji Bessela prawdziwy jest również następujący związek:

$$J_{n-1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + J_{n+1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = \frac{2n}{\Delta\Theta_{\text{FM}}} J_n(\Delta\Theta_{\text{FM}}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dla $n = 1$ przybiera on postać:

$$J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) + J_2(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = \frac{2}{\Delta\Theta_{\text{FM}}} J_1(\Delta\Theta_{\text{FM}})$$

Korzystając z tej zależności upraszczamy wyrażenie opisujące współczynnik głębokości modulacji m i otrzymujemy warunek:

$$m = \Delta\Theta_{\text{FM}}$$

Stwierdzamy, że zaproponowana metoda realizacji modulacji SSB-LC⁺ jest prawidłowa, gdy dewiacja fazy jest równa współczynnikowi głębokości modulacji.

Po uwzględnieniu warunku $m = \Delta\Theta_{\text{FM}}$ sygnał wyjściowy filtra przyjmuje postać:

$$\varphi_0(t) = \varphi_{\text{SSB-LC}^+}(t) = A_0 J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) \cos \omega_0 t + 2A_0 J_1(\Delta\Theta_{\text{FM}}) \cos(\omega_0 + \omega_m)t$$

Rozwiązanie 1.1.27

Dla modulacji VSB-SC słuszne są następujące zależności opisujące transmitancję składowej synfazowej filtra pasmowego $H_I(\omega)$:

$$H_I(\omega) = H(\omega + \omega_0) + H(\omega - \omega_0)$$

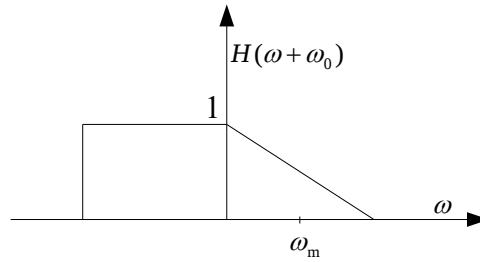
oraz transmitancję składowej kwadraturowej filtra pasmowego $H_Q(\omega)$:

$$H_Q(\omega) = j[H(\omega + \omega_0) - H(\omega - \omega_0)]$$

Uwzględniając powyższe zależności możemy zapisać następującą zależność:

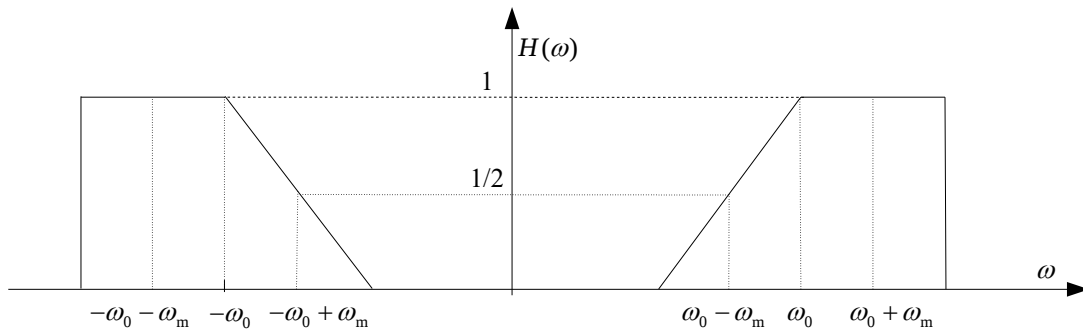
$$H_I(\omega) + \frac{H_Q(\omega)}{j} = 2H(\omega + \omega_0)$$

Wykonując graficznie powyższą operację dodawania otrzymujemy transmitancję filtra pasmowego $H(\omega + \omega_0)$ przedstawioną na rysunku R.18.



Rysunek R.18

Rysunek R.19 przedstawia transmitancję $H(\omega)$ filtra pasmowoprzepustowego.



Rysunek R.19

Założmy, że amplituda sygnału nośnego $A_0 = 1$ V. Sygnał tonowej modulacji AM można zapisać jako:

$$\varphi_{AM}(t) = \cos \omega_0 t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 + \omega_m)t$$

Po przejściu sygnału $\varphi_{AM}(t)$ przez filtr pasmowy o transmitancji $H(\omega)$ sygnał wyjściowy filtra przyjmie postać:

$$\varphi_0(t) = \cos \omega_0 t + \frac{m}{4} \cos(\omega_0 - \omega_m)t + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 + \omega_m)t$$

Możemy przyjąć, że przy założeniu $\omega_0 \gg \omega_m$ obwiednia sygnału $\varphi_0(t)$ zmienia się w granicach $(1 - m/4 - m/2; 1 + m/4 + m/2)$. Wynika stąd, że w sygnale wyjściowym filtra efekt przemodulowania nie wystąpi, gdy:

$$\frac{m}{4} + \frac{m}{2} = \frac{3m}{4} < 1$$

Rozwiązując nierówność otrzymujemy warunek:

$$m < \frac{4}{3}$$

który jest spełniony, ponieważ z założenia $0 < m < 1$. W sygnale wyjściowym filtra nie występuje zjawisko przemodulowania.

Rozwiązanie 1.1.28

Transmitancja układu RL łącznie z separatorem opisana jest zależnością:

$$H(\omega) = \frac{\beta R}{R + j\omega L}$$

zatem kwadrat modułu transmitancji:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{\beta^2 R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Widmo gęstości mocy stacjonarnego procesu losowego jest transformatą Fouriera jego funkcji korelacji własnej, zatem:

$$S_u(\omega) = F\{e^{-\alpha|z|}\} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Sygnał o widmie gęstości mocy $S_u(\omega)$ jest sygnałem wejściowym dla układu RL z separatorem o transmitancji $H(\omega)$. Dla układów liniowych (a więc również dla układu analizowanego w tym zadaniu) spełniona jest następująca zależność:

$$S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 S_u(\omega)$$

gdzie $S_x(\omega)$ jest widmem gęstości mocy sygnału wyjściowego filtru, który jest równocześnie sygnałem modulującym dla układu modulacji AM. Znając zatem widmo gęstości mocy analizowanego sygnału możemy wyznaczyć jego wartość średniokwadratową, która równocześnie określa moc sygnału modulującego:

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |H(\omega)|^2 S_u(\omega) d\omega = \frac{2\alpha\beta^2 R^2}{\pi L^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{(R^2/L^2 + \omega^2)(\alpha^2 + \omega^2)} = \\ &= \frac{2\alpha\beta^2 R^2}{\pi L^2} \cdot \frac{\pi}{2R/L\alpha(R^2/L^2 + \alpha^2)} = \frac{\beta^2 R}{L(R^2/L^2 + \alpha^2)} \end{aligned}$$

Częstość graniczna filtru dolnopasmowego $\omega_{\max} = R/L$, zatem:

$$\overline{x^2} = \frac{\beta^2 \omega_{\max}}{\omega_{\max}^2 + \alpha^2}$$

Odchylenie standardowe jest pierwiastkiem z wartości średniokwadratowej sygnału:

$$\sigma_x = \beta \sqrt{\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\max}^2 + \alpha^2}}$$

Modulator został zbadany metodą trapezową. Analizując obraz na ekranie oscyloskopu wnioskujemy, że:

$$m = \frac{3-1}{3+1} = 0,5$$

Znając rozdzielczość oscyloskopu C_x oraz odczytując rozmiary poziome figury, która pojawiła się na ekranie oscyloskopu wyznaczamy amplitudę tonowego sygnału modulującego:

$$\begin{aligned} 4\text{cm} \cdot 0,25 \frac{\text{V}}{\text{cm}} &= 1 \text{ V} = 2a \\ a &= 0,5 \text{ V} \end{aligned}$$

Tak więc stała modulatora AM:

$$k = \frac{m}{a} = \frac{0,5}{0,5} = 1 \text{ V}^{-1}$$

Zgodnie z warunkami zadania zakładamy, że maksymalna wartość sygnału modulującego jest 5 razy większa od jego odchylenia standardowego. Warunkiem niewystępowania przemodulowania jest, by współczynnik głębokości modulacji $m = k|x|_{\max} < 1$. Uwzględniając otrzymane zależności otrzymujemy warunek:

$$k \cdot 5\sigma_x = 5\beta \sqrt{\frac{\omega_{\max}^2}{\omega_{\max}^2 + \alpha^2}} < 1$$

Rozwiązując tę nierówność względem β otrzymujemy poszukiwaną zależność:

$$\beta < \frac{1}{5} \sqrt{\frac{\omega_{\max}^2 + \alpha^2}{\omega_{\max}}}$$

Rozwiązanie 1.1.29

Zapiszmy postać sygnału modulacji jednowstęgowej z falą nośną oddzielnie dla przypadku górnej i dolnej wstęgi bocznej:

$$\varphi_{\text{SSB-LC}^+}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + mA_0 \cos(\omega_0 + \omega_m)t$$

$$\varphi_{\text{SSB-LC}^-}(t) = A_0 \cos \omega_0 t + mA_0 \cos(\omega_0 - \omega_m)t$$

Na wyjściu kanału transmisyjnego prążki sygnału zmodulowanego mają odpowiednio amplitudy:

- $|H(\omega_0)|A_0$ – amplituda sygnału nośnego
- $|H(\omega_0 - \omega_m)|mA_0$ – amplituda dolnej wstęgi bocznej
- $|H(\omega_0 + \omega_m)|mA_0$ – amplituda górnej wstęgi bocznej

Chcemy uzyskać przebieg o maksymalnej wartości stosunku mocy wstęgi bocznej do mocy całego sygnału. Zależność ta przybiera następującą postać:

- dla wstęgi górnej:

$$\mu_+ = \frac{\frac{1}{2} m^2 A_0^2 |H(\omega_0 + \omega_m)|^2}{\frac{1}{2} A_0^2 |H(\omega_0)|^2 + \frac{1}{2} m^2 A_0^2 |H(\omega_0 + \omega_m)|^2} = \frac{m^2 |H(\omega_0 + \omega_m)|^2}{|H(\omega_0)|^2 + m^2 |H(\omega_0 + \omega_m)|^2}$$

- dla wstęgi dolnej:

$$\mu_- = \frac{\frac{1}{2} m^2 A_0^2 |H(\omega_0 - \omega_m)|^2}{\frac{1}{2} A_0^2 |H(\omega_0)|^2 + \frac{1}{2} m^2 A_0^2 |H(\omega_0 - \omega_m)|^2} = \frac{m^2 |H(\omega_0 - \omega_m)|^2}{|H(\omega_0)|^2 + m^2 |H(\omega_0 - \omega_m)|^2}$$

Należy teraz rozstrzygnąć, który współczynnik jest większy. Załóżmy, że:

$$\mu_- < \mu_+$$

Przy takim założeniu porównujemy wyznaczone współczynniki:

$$\frac{m^2 |H(\omega_0 - \omega_m)|^2}{|H(\omega_0)|^2 + m^2 |H(\omega_0 - \omega_m)|^2} < \frac{m^2 |H(\omega_0 + \omega_m)|^2}{|H(\omega_0)|^2 + m^2 |H(\omega_0 + \omega_m)|^2}$$

Dla uproszczenia zapisu przyjmujemy następujące oznaczenia:

- $|H(\omega_0)|^2 = a^2$
- $|H(\omega_0 - \omega_m)|^2 = a_-^2$
- $|H(\omega_0 + \omega_m)|^2 = a_+^2$

Nierówność przyjmie zatem postać:

$$\frac{1}{\frac{a_-^2}{a^2} + m^2} < \frac{1}{\frac{a_+^2}{a^2} + m^2}$$

Ponieważ $a_- > a > a_+$, $a_- > 0$, $a_+ > 0$, zatem powyższa nierówność nie może być spełniona. Wobec tego prawdziwa jest nierówność:

$$\mu_- > \mu_+$$

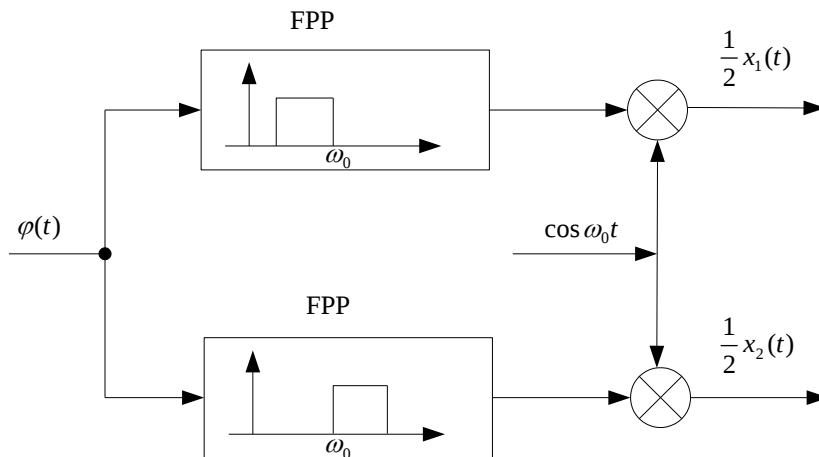
Wnioskujemy zatem, że dla uzyskania przebiegu o maksymalnej wartości stosunku mocy wstęgi bocznej do mocy całego sygnału przy zadanej charakterystyce amplitudowo-częstotliwościowej kanału transmisyjnego należy przesyłać sygnał nośny oraz dolny prążek.

Rozwiązanie 1.1.30

Sygnał wyjściowy układu z rysunku 1.17 jest sumą dwóch sygnałów jednowstęgowych $\varphi_{\text{SSB-SC}^+}(t)$ oraz $\varphi_{\text{SSB-SC}^-}(t)$. Tak więc sygnał wynikowy $\varphi(t)$ jest opisany zależnością:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_{\text{SSB-SC}^+}(t) + \varphi_{\text{SSB-SC}^-}(t) = x_2(t) \cos \omega_0 t - \hat{x}_2(t) \sin \omega_0 t + \\ &+ x_1(t) \cos \omega_0 t + \hat{x}_1(t) \sin \omega_0 t = [x_1(t) + x_2(t)] \cos \omega_0 t + [\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)] \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Układ detektora odtwarzającego sygnały $x_1(t)$ i $x_2(t)$ przedstawiono na rysunku R.20.



Rysunek R.20

Rozwiązanie 1.1.31

Analizując rysunek 1.18 sygnał $\varphi(t)$ możemy zapisać jako

$$\varphi(t) = x_1(t)\cos\omega_0 t + x_2(t)\sin\omega_0 t$$

Sygnał ten zostaje poddany detekcji synchronicznej w detektorze składającym się z dwóch torów detekcji – w jednym z nich stosujemy sygnał nośny $\cos\omega_0 t$, w drugim natomiast $\sin\omega_0 t$. Dla pierwszego toru otrzymujemy:

$$\varphi(t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}x_1(t)[1 + \cos 2\omega_0 t] + \frac{1}{2}x_2(t)\sin 2\omega_0 t$$

Po odfiltrowaniu składowych skupionych wokół częstości $2\omega_0$ otrzymujemy sygnał:

$$x_{01}(t) = \frac{1}{2}x_1(t)$$

Podobny rezultat otrzymujemy dla drugiego toru:

$$\varphi(t)\sin\omega_0 t = \frac{1}{2}x_1(t)\sin 2\omega_0 t + \frac{1}{2}x_2(t)[1 - \cos 2\omega_0 t]$$

Po odfiltrowaniu składowych skupionych wokół częstości $2\omega_0$ otrzymujemy sygnał:

$$x_{02}(t) = \frac{1}{2}x_2(t)$$

Przystępujemy do analizy wpływu błędów synchronizacji (przy założeniu, że błąd fazy $\theta \approx 0$) na sygnał wyjściowy. Rozpatrujemy pierwszy tor sygnału:

$$\begin{aligned}\varphi(t)\cos(\omega_0 t + \theta) &= x_1(t)\cos\omega_0 t \cos(\omega_0 t + \theta) + x_2(t)\sin\omega_0 t \cos(\omega_0 t + \theta) = \\ &= \frac{1}{2}x_1(t)[\cos\theta + \cos(2\omega_0 t + \theta)] + \frac{1}{2}x_2(t)[\sin\theta + \sin(2\omega_0 t + \theta)]\end{aligned}$$

Po odfiltrowaniu składowych skupionych wokół częstości $2\omega_0$ otrzymujemy sygnał:

$$x_{01} = \frac{1}{2}x_1(t)\cos\theta + \frac{1}{2}x_2(t)\sin\theta$$

Uwzględniając założenie $\theta \approx 0$:

$$x_{01} = \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{2}\theta x_2(t)$$

Stwierdzamy, że im większy jest błąd synchronizacji, tym większe zniekształcenie sygnału.

Przeprowadzamy podobne obliczenia dla drugiego toru:

$$\begin{aligned}\varphi(t)\sin(\omega_0 t + \theta) &= x_1(t)\cos\omega_0 t \sin(\omega_0 t + \theta) + x_2(t)\sin\omega_0 t \sin(\omega_0 t + \theta) = \\ &= \frac{1}{2}x_1(t)[\sin\theta + \sin(2\omega_0 t + \theta)] + \frac{1}{2}x_2(t)[\cos\theta - \cos(2\omega_0 t + \theta)]\end{aligned}$$

Po odfiltrowaniu składowych skupionych wokół częstości $2\omega_0$ otrzymujemy sygnał:

$$x_{02} = \frac{1}{2}x_1(t)\sin\theta + \frac{1}{2}x_2(t)\cos\theta$$

Uwzględniając $\theta \approx 0$:

$$x_{02} = \frac{1}{2}\theta x_1(t) + \frac{1}{2}x_2(t)$$

Podobnie jak w pierwszym torze, również w drugim torze zachodzi liniowa zależność pomiędzy sygnałem a błędem synchronizacji.

Rozwiązanie 1.1.32

Należy rozróżnić jeden lub dwa etapy przemiany częstotliwości sygnału modulującego, w zależności od tego, czy stosujemy układ jedno- czy dwustopniowy. W układzie jednostopniowym:

$$f_m \rightarrow f_0 + f_m$$

W układzie dwustopniowym:

$$f_m \rightarrow f_0' + f_m \rightarrow f_0'' + f_0' + f_m$$

W układzie dwustopniowym musi być spełniony następujący warunek:

$$f_0 + f_m = f_0'' + f_0' + f_m$$

czyli:

$$f_0 = f_0'' + f_0'$$

Wyznamy zatem względną odległość prążków bocznych w układzie jednostopniowym:

$$r_1 = \frac{\Delta f}{f} = \frac{2f_m}{f_0} = \frac{2f_m}{f_0'' + f_0'} = \frac{\frac{2f_m}{f_0'}}{1 + \frac{f_0''}{f_0'}} = \frac{\frac{2f_m}{f_0'}}{1+n}$$

Względna odległość filtrowanych prążków w pierwszym stopniu układu dwustopniowego wynosi:

$$r_2^{(1)} = \frac{2f_m}{f_0'} = (1+n)r_1$$

Widzimy zatem, że już w tym przypadku względna odległość filtrowanych prążków jest większa w układzie dwustopniowym w porównaniu do układu jednostopniowego. W drugim stopniu układu dwustopniowego mamy:

$$r_2^{(2)} = \frac{2(f_0' + f_m)}{f_0''} = \frac{2\left(1 + \frac{f_m}{f_0'}\right)}{\frac{f_0''}{f_0'}} = \frac{2 + \frac{2f_m}{f_0'}}{n}$$

a zatem:

$$r_2^{(2)} = \frac{2 + (1+n)r_1}{n} = \frac{2}{n} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)r_1$$

W tym przypadku jeszcze wyraźniej widać zysk wynikający z zastosowania układu dwustopniowego.

Rozwiązanie 1.1.33

Zadanie można rozwiązać dwoma sposobami. Stosując pierwszą metodę sygnał $\varphi(t) = x(t)\sin\omega_0 t + \hat{x}(t)\cos\omega_0 t$ zapisujemy jako:

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}\{\hat{x}(t) - jx(t)\}e^{j\omega_0 t}$$

Transformata Fouriera sygnału $\varphi(t)$:

$$\Phi(\omega) = \frac{Z(\omega - \omega_0) + Z^*(-\omega - \omega_0)}{2}$$

gdzie:

$$\hat{x}(t) - jx(t) \leftrightarrow Z(\omega)$$

Transformata Fouriera sygnału w kwadraturze opisana jest zależnością:

$$\hat{X}(\omega) = \begin{cases} -jX(\omega), & \omega > 0 \\ jX(\omega), & \omega < 0 \end{cases}$$

Rozpatrzmy dwa przypadki, w zależności od znaku częstości ω :

1. $\omega \geq 0$

$$Z(\omega) = -jX(\omega) - jX(\omega) = -2jX(\omega)$$

2. $\omega < 0$

$$Z(\omega) = jX(\omega) - jX(\omega) = 0$$

Ponieważ dla $\omega < 0$ transformata $Z(\omega) = 0$, zatem sygnał $\varphi(t)$ jest sygnałem górnoprzestrzennym.

Drugi sposób polega wprost na wyznaczeniu transformaty Fouriera sygnału $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \frac{j}{2} [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)] + \frac{j}{2} [\hat{X}(\omega + \omega_0) + \hat{X}(\omega - \omega_0)] = \\ &= \frac{j}{2} [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)] + \frac{j}{2} [\operatorname{sgn}(\omega + \omega_0)X(\omega + \omega_0) + \operatorname{sgn}(\omega - \omega_0)X(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

Rozpatrujemy dwa przypadki, w zależności od relacji pomiędzy częstością ω a częstością sygnału nośnego ω_0 :

1. $\omega \geq \omega_0$

$$\Phi(\omega) = \frac{j}{2} [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)] - \frac{j}{2} [X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)] = -jX(\omega - \omega_0)$$

2. $0 < \omega < \omega_0$

$$\Phi(\omega) = \frac{j}{2} [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)] - \frac{j}{2} [X(\omega + \omega_0) - X(\omega - \omega_0)] = 0$$

Ponieważ dla $0 < \omega < \omega_0$ transformata $Z(\omega) = 0$, zatem sygnał $\varphi(t)$ jest sygnałem górnoprzestrzennym.

Rozwiązanie 1.1.34

Sygnał zmodulowany amplitudowo AM opisany jest ogólną zależnością:

$$\varphi_{AM}(t) = A_0[1 + kx(t)]\cos\omega_0 t$$

Sygnał wyjściowy układu kwadratujującego zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned} \varphi_{AM}^2(t) &= A_0^2[1 + kx(t)]^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} A_0^2[1 + kx(t)]^2 (1 + \cos 2\omega_0 t) \\ \varphi_{AM}^2(t) &= \frac{1}{2} A_0^2[1 + kx(t)]^2 + \frac{1}{2} A_0^2[1 + kx(t)]^2 \cos 2\omega_0 t \end{aligned}$$

Przy założeniu, że sygnał $x(t)$ jest sygnałem dolnoprzestrzennym o maksymalnej częstości $\omega_{\max}$ szerokość pasma sygnału $A_0^2[1 + kx(t)]^2$ wynosi $2\omega_{\max}$ (szczegóły dowodu zostały podane w zakończeniu zadania). Wnioskujemy, że filtr dolnoprzestrzenny wytlumi składnik $A_0^2[1 + kx(t)]^2 \cos 2\omega_0 t$; drugi składnik zostanie

przepuszczony do układu pierwiastkującego. Sygnał wyjściowy układu pierwiastkującego jest równy:

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{2} A_0^2 [1 + kx(t)]^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_0 |1 + kx(t)|$$

Przy założeniu, że nie występuje przemodulowanie, a składowa stała jest usuwana, otrzymujemy:

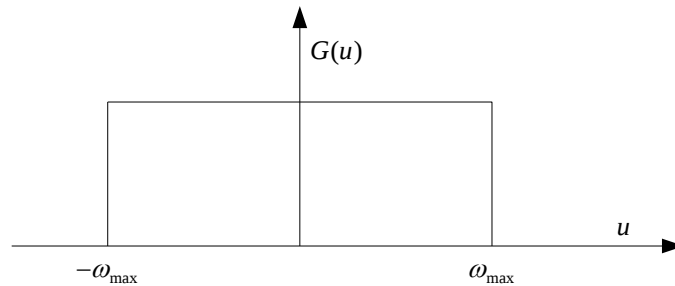
$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} k A_0 |x(t)|$$

a więc układ z rysunku 1.22 działa jak detektor obwiedni. Układ nie działa prawidłowo w przypadku przemodulowania; nie demoduluje również poprawnie sygnału DSB-SC, gdyż w tym przypadku:

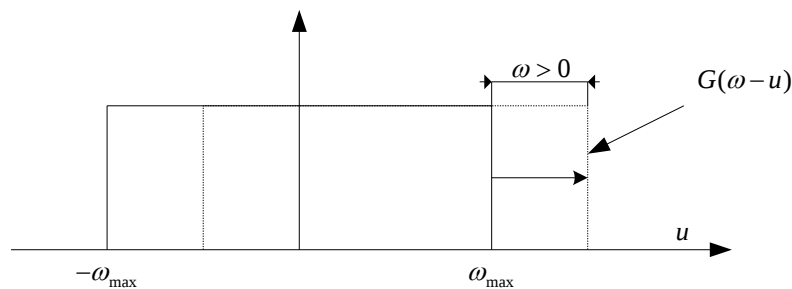
$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} k A_0 |x(t)|$$

Przystępujemy do wykazania, że podnoszenie do kwadratu powoduje dwukrotne rozszerzenie pasma sygnału dolnopasmowego $g(t)$ o maksymalnej częstotliwości $\omega_{\max}$. Wyznaczamy transformatę Fouriera sygnału $g^2(t)$ korzystając z właściwości splotu w dziedzinie częstotliwości:

$$F\{g^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)G(\omega - u)du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_{\max}}^{+\omega_{\max}} G(u)G(\omega - u)du$$



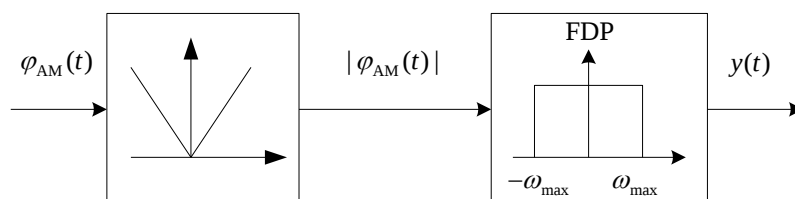
Rysunek R.21



Rysunek R.22

Podcałkowy iloczyn funkcji jest różny od zera w przedziale $\omega \in [-2\omega_{\max}, 2\omega_{\max}]$, stąd ostatecznie wnioskujemy, że podniesienie sygnału do kwadratu powoduje dwukrotne rozszerzenie pasma.

Przystępujemy do wykazania, że jeżeli pierwszy stopień układu jest prostownikiem dwupołkowym o charakterystyce pokazanej na rysunku R.23, to sygnał AM może być demodulowany bez układu pierwiastkującego na wyjściu.



Rysunek R.23

Sygnał wyjściowy prostownika dwupołkowego jest opisany zależnością (jeżeli nie występuje przemodulowanie):

$$|\varphi_{AM}(t)| = A_0 [1 + kx(t)] |\cos \omega_0 t|$$

Okres sygnału $|\cos \omega_0 t|$ wynosi π/ω_0 , a więc jego podstawowa częstość jest równa:

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{\omega_0}} = 2\omega_0$$

Ponieważ sygnał $|\cos \omega_0 t|$ jest parzysty, to jego trygonometryczny szereg Fouriera przyjmuje postać:

$$|\cos \omega_0 t| = F_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos n2\omega_0 t$$

Zatem:

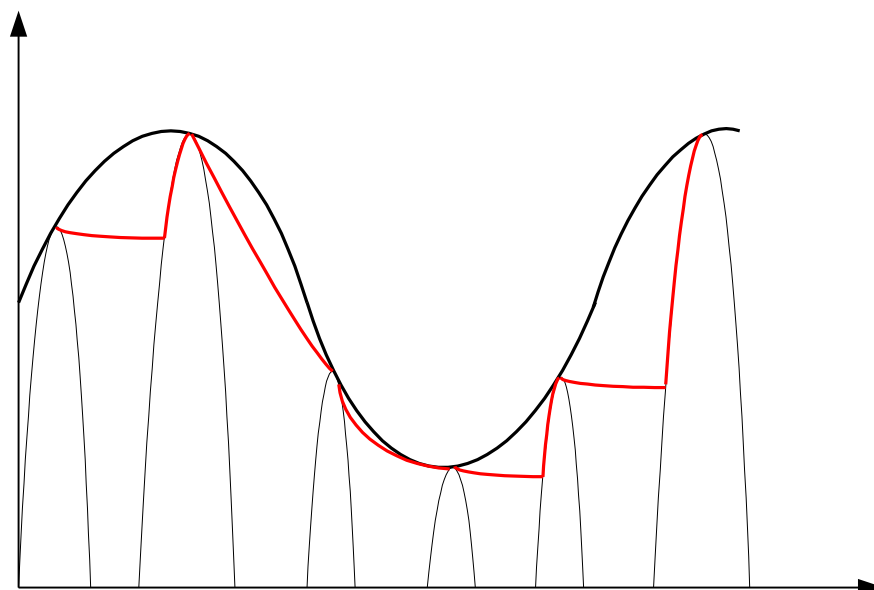
$$|\varphi_{AM}(t)| = A_0 [1 + kx(t)] F_0 + 2A_0 [1 + kx(t)] \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos n2\omega_0 t$$

Jeżeli pasmo przepustowe filtra dolnoprzepustowego FDP będzie zawarte w przedziale $(0, \omega_{\max})$, to sygnał wyjściowy układu będzie liniowo uzależniony od sygnału modulującego:

$$y(t) = kA_0 F_0 x(t)$$

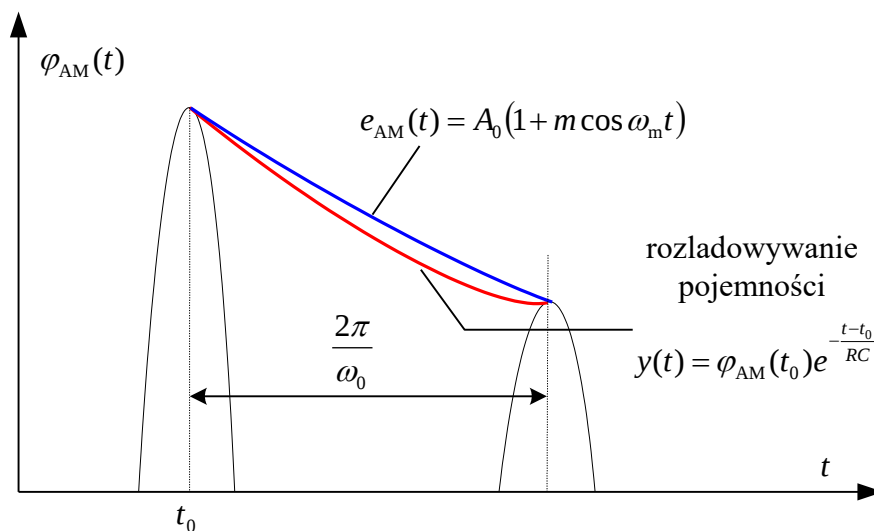
Rozwiązanie 1.1.35

Przyjmujemy podstawowe założenie, że wierne odtworzenie obwiedni sygnału modulującego ma miejsce wtedy, gdy wartości napięcia wyjściowego detektora i obwiedni sygnału zmodulowanego są równe co najmniej w punktach maksimum lokalnego fali nośnej położonych na opadającym zboczach obwiedni. Ta korzystna sytuacja została przedstawiona na rysunku R.24.



Rysunek R.24

W obwiedni sygnału zmodulowanego AM wyróżniamy część narastającą oraz opadającą. Ponieważ rozładowywanie pojemności jest opisane funkcją malejącą, rozpatrujemy wyłącznie część opadającą obwiedni sygnału. Na rysunku R.25 przedstawiony został fragment sygnału $\varphi_{AM}(t)$ z wyróżnioną opadającą obwiednią sygnału zmodulowanego AM oraz sygnał wyjściowy detektora:



Rysunek R.25

Przy warunku $\omega_0 \gg \omega_m$ możemy przyjąć, że zarówno obwiednia sygnału zmodulowanego, jak i napięcie wyjściowe detektora obwiedni opadają w sposób liniowy. Warunek wiernego odtwarzania można sformułować jako równość szybkości opadania obwiedni oraz szybkości opadania napięcia wyjściowego detektora, co można zapisać jako równość pochodnych analizowanych sygnałów:

$$\dot{e}_{AM}(t) = \dot{y}(t)$$

Obwiednia sygnału zmodulowanego opisana jest zależnością:

$$e_{AM}(t) = A_0(1 + m \cos \omega_m t)$$

zatem pochodna obwiedni $e_{AM}(t)$:

$$\dot{e}_{AM}(t) = -mA_0\omega_m \sin \omega_m t$$

Dla chwili $t = t_0$:

$$\dot{e}_{AM}(t_0) = -mA_0\omega_m \sin \omega_m t_0$$

Sygnał wyjściowy detektora opisany jest zależnością:

$$y(t) = \varphi_{AM}(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{RC}} = e_{AM}(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

zatem pochodna sygnału $y(t)$:

$$\dot{y}(t) = -\frac{e_{AM}(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{RC}}}{RC}$$

Dla chwili $t = t_0$:

$$\dot{y}(t_0) = -\frac{e_{AM}(t_0)}{RC} = -\frac{A_0(1 + m \cos \omega_m t_0)}{RC}$$

Uwzględniając warunek równości pochodnych:

$$-mA_0\omega_m \sin \omega_m t_0 = -\frac{A_0(1 + m \cos \omega_m t_0)}{RC}$$

otrzymujemy zależność pozwalającą wyznaczyć stałą czasową układu detektora:

$$RC = \frac{1 + m \cos \omega_m t_0}{m\omega_m \sin \omega_m t_0}$$

Mankamentem wyznaczonego wzoru jest zależność od chwili początkowej t_0 . Aby uniezależnić się od chwili początkowej t_0 , należy wybrać stałą czasową $T = RC$ odpowiadającą większej szybkości opadania, a zatem mniejszej wartości t_0 :

$$T^* = (RC)^* = \min_{t_0} \frac{1 + m \cos \omega_m t_0}{m\omega_m \sin \omega_m t_0}$$

W celu wyznaczenia optymalnej wartości stałej czasowej T^* wyznaczamy pochodną:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt_0} &= \frac{-m^2\omega_m^2 \sin^2 \omega_m t_0 - (1 + m \cos \omega_m t_0)m\omega_m^2 \cos \omega_m t_0}{m^2\omega_m^2 \sin^2 \omega_m t_0} = \\ &= -\frac{m^2\omega_m^2 + m\omega_m^2 \cos \omega_m t_0}{m^2\omega_m^2 \sin^2 \omega_m t_0} = -\frac{m + \cos \omega_m t_0}{m \sin^2 \omega_m t_0} \end{aligned}$$

Szukamy miejsc zerowych pochodnej:

$$\frac{dT}{dt_0} = -\frac{m + \cos \omega_m t_0}{m \sin^2 \omega_m t_0} = 0 \Leftrightarrow \cos \omega_m t_0 = -m$$

Wobec tego poszukiwana zależność:

$$T^* = (RC)^* = \frac{1 - m^2}{m\omega_m \sqrt{1 - m^2}} = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m\omega_m}$$

Rozwiązanie 1.1.36

Detektor synchroniczny wytwarza przebieg:

$$\varphi_0(t) = x(t) \cos \omega_0 t \cos[(\omega_0 + \Delta\omega_0)t + \theta] = \frac{1}{2} x(t) \cos[(\Delta\omega_0)t + \theta] + \\ + \frac{1}{2} x(t) \cos[(2\omega_0 + \Delta\omega_0)t + \theta]$$

Drugi składnik to widmo skupione wokół $\pm(2\omega_0 + \Delta\omega_0)$, a więc zostanie odfiltrowany przez filtr poddetekcyjny. Przebieg wyjściowy z filtru poddetekcyjnego przybierze postać:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2} x(t) \cos[(\Delta\omega_0)t + \theta]$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $\Delta\omega = 0$

Przebieg wyjściowy z filtru poddetekcyjnego przybierze postać:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2} x(t) \cos \theta$$

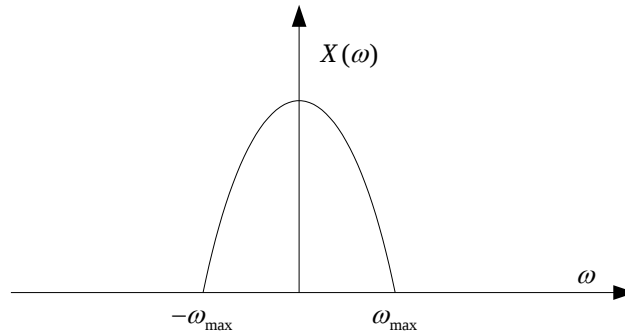
Następuje tłumienie sygnału bez zniekształcenia.

2. $\theta = 0$

Przebieg wyjściowy z filtru poddetekcyjnego przybierze postać:

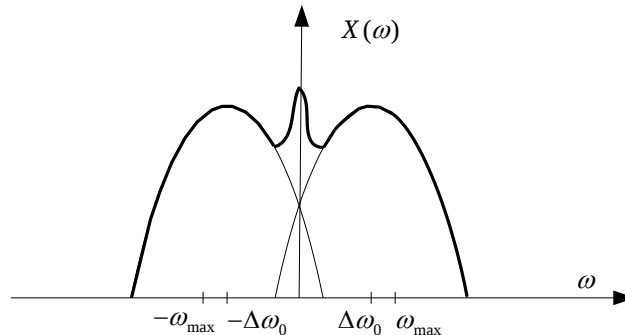
$$\psi_0(t) = \frac{1}{2} x(t) \cos(\Delta\omega_0)t$$

Następuje skażenie sygnału poprzez jego tłumienie zależne w czasie. W celu zobrazowania wpływu błędu częstości na sygnał wyjściowy wyznaczmy widmo sygnału wyjściowego filtru. Zakładamy, że sygnał modulujący posiada widmo o kształcie przedstawionym na rysunku R.26.



Rysunek R.26

Zatem widmo sygnału wyjściowego będzie miało kształt pokazany na rysunku R.27.



Rysunek R.27

Tak więc sygnał wyjściowy będzie zniekształcony. Przy większych wartościach błędu częstości $\Delta\omega_0$ sygnał będzie całkowicie niezrozumiały.

Rozwiązanie 1.1.37

Detektor synchroniczny wytwarza przebieg:

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &= \varphi_{\text{SSB-SC}^+}(t) \cos[(\omega_0 + \Delta\omega_0)t + \theta] = x(t) \cos \omega_0 t \cos[(\omega_0 + \Delta\omega_0)t + \theta] - \\ &\quad - \hat{x}(t) \sin \omega_0 t \cos[(\omega_0 + \Delta\omega_0)t + \theta] = \frac{1}{2} x(t) \{ \cos(\Delta\omega_0 t + \theta) + \cos[(2\omega_0 + \Delta\omega_0)t + \theta] \} + \\ &\quad - \frac{1}{2} \hat{x}(t) \{ \sin[(2\omega_0 + \Delta\omega_0)t + \theta] - \sin(\Delta\omega_0 t + \theta) \}\end{aligned}$$

Widmo skupione wokół częstotliwości $\pm(2\omega_0 + \Delta\omega_0)$ zostanie odfiltrowane przez filtr podetekcyjny. Przebieg wyjściowy z filtra podetekcyjnego:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2} x(t) \cos(\Delta\omega_0 t + \theta) + \frac{1}{2} \hat{x}(t) \sin(\Delta\omega_0 t + \theta)$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $\theta = 0$

Przebieg wyjściowy z filtra podetekcyjnego przybierze postać:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2} x(t) \cos \Delta\omega_0 t + \frac{1}{2} \hat{x}(t) \sin \Delta\omega_0 t$$

Wyznaczamy transformatę Fouriera tego sygnału:

$$\begin{aligned}\Psi_0(\omega) &= \frac{1}{4} [X(\omega - \Delta\omega) + X(\omega + \Delta\omega)] + \frac{j}{4} [\hat{X}(\omega + \Delta\omega) - \hat{X}(\omega - \Delta\omega)] = \\ &= \frac{1}{4} [X(\omega - \Delta\omega) + X(\omega + \Delta\omega)] + \\ &\quad + \frac{1}{4} [\text{sgn}(\omega + \Delta\omega) X(\omega + \Delta\omega) - \text{sgn}(\omega - \Delta\omega) X(\omega - \Delta\omega)]\end{aligned}$$

Rozpatrujemy dwie sytuacje:

a) $0 \leq \omega \leq \Delta\omega$

Transformata Fouriera sygnału $\psi_0(t)$ przyjmuje postać:

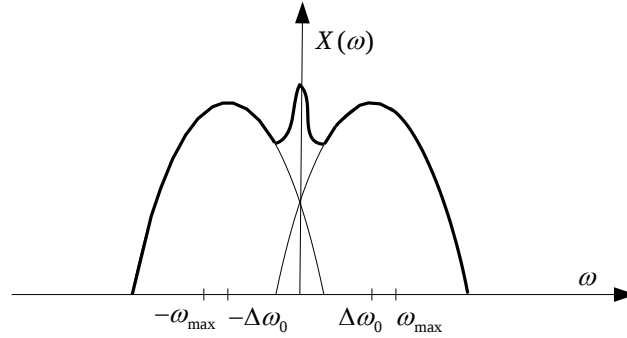
$$\begin{aligned}\Psi_0(\omega) &= \frac{1}{4} X(\omega - \Delta\omega) + \frac{1}{4} X(\omega + \Delta\omega) + \frac{1}{4} X(\omega + \Delta\omega) + \frac{1}{4} X(\omega - \Delta\omega) = \\ &= \frac{1}{2} X(\omega + \Delta\omega) + \frac{1}{2} X(\omega - \Delta\omega)\end{aligned}$$

b) $\omega > \Delta\omega$

Transformata Fouriera sygnału $\psi_0(t)$ przyjmuje postać:

$$\Psi_0(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega + \Delta\omega)$$

Podobnie jak w przypadku sygnału DSB-SC występuje interferencja widma pokazana na rysunku R.28.



Rysunek R.28

2. $\Delta\omega = 0$

Przebieg wyjściowy z filtru poddetekcyjnego przybierze postać:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2} x(t) \cos \theta + \frac{1}{2} \hat{x}(t) \sin \theta$$

Wyznamy transformatę Fouriera tego sygnału:

$$\Psi_0(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) (\cos \theta - j \operatorname{sgn} \sin \theta)$$

Rozpatrujemy dwie sytuacje:

a) $\omega > 0$

$$\Psi_0(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) e^{-j\theta} = \frac{1}{2} |X(\omega)| e^{j(\theta(\omega)-\theta)}$$

b) $\omega \leq 0$

$$\Psi_0(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) e^{j\theta} = \frac{1}{2} |X(\omega)| e^{j(\theta(\omega)+\theta)}$$

Następuje przesunięcie wszystkich częstotliwości o ten sam kąt θ bez zmiany tłumienia.

Rozwiązanie 1.1.38

Sumaryczny sygnał złożony z sygnału zmodulowanego DSB-SC oraz sygnału nośnego przesuniętego w fazie przybiera postać:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{DSB-SC}}(t) + A_0 \cos(\omega_0 t + \theta) &= kA_0 x(t) \cos \omega_0 t + A_0 \cos(\omega_0 t + \theta) = \\ &= kA_0 x(t) \cos \omega_0 t + A_0 \cos \omega_0 t \cos \theta - A_0 \sin \omega_0 t \sin \theta = \\ &= A_0 \sqrt{[kx(t) + \cos \theta]^2 + \sin^2 \theta} \cos[\omega_0 t + \gamma(t)] \end{aligned}$$

Sygnał wyjściowy detektora obwiedni będzie opisany zatem zależnością:

$$e(t) = A_0 \sqrt{k^2 x^2(t) + 2kx(t) \cos \theta + 1}$$

Dla płytkiej modulacji $k|x|_{\max} \ll 1$ możemy skorzystać ze stosowanego rozwinięcia wyrażenia określającego obwiednię w szereg potęgowy oraz uwzględnienia składnika liniowego:

$$e(t) \approx A_0 [1 + kx(t) \cos \theta]$$

Stwierdzamy zatem, że demodulacja jest poprawna, gdy modulacja jest płytka, a przesunięcie fazowe sygnału nośnego jest stałe w czasie. Obydwa te ograniczenia powodują, że analizowany system demodulacji niekoherentnej sygnału DSB-SC nie znalazł szerszego zastosowania.

Rozwiązanie 1.1.39

Sumaryczny sygnał złożony z sygnału zmodulowanego SSB-SC oraz sygnału nośnego przesuniętego w fazie przybiera postać:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{SSB-SC}}(t) + A_0 \cos(\omega_0 t + \theta) &= kA_0 x(t) \cos \omega_0 t + kA_0 \hat{x}(t) \sin \omega_0 t + A_0 \cos(\omega_0 t + \theta) = \\ &= kA_0 x(t) \cos \omega_0 t + kA_0 \hat{x}(t) \sin \omega_0 t + A_0 \cos \omega_0 t \cos \theta - A_0 \sin \omega_0 t \sin \theta = \\ &= A_0 \sqrt{[kx(t) + \cos \theta]^2 + [k\hat{x}(t) + \sin \theta]^2} \cos[\omega_0 t + \gamma(t)]\end{aligned}$$

Sygnał wyjściowy detektora obwiedni będzie opisany zatem zależnością:

$$e(t) = A_0 \sqrt{k^2 x^2(t) + 2kx(t) \cos \theta + k^2 \hat{x}^2(t) + 2k\hat{x}(t) \sin \theta + 1}$$

Dla płytkiej modulacji $k|x|_{\max} \ll 1$ możemy skorzystać ze stosowanego rozwinięcia wyrażenia określającego obwiednię w szereg potęgowy oraz uwzględnienia składnika liniowego:

$$e(t) \approx A_0 [1 + kx(t) \cos \theta + k\hat{x}(t) \sin \theta]$$

Stwierdzamy zatem, że demodulacja jest poprawna, gdy modulacja jest płytka, a przesunięcie fazowe sygnału nośnego jest stałe w czasie. Obydwa te ograniczenia powodują, że analizowany system demodulacji niekoherentnej sygnału SSB-SC nie znalazł szerszego zastosowania.

Rozwiązanie 1.1.40

Detekcja synchroniczna polega na przemnożeniu sygnału zmodulowanego przez sygnał fali nośnej. Zatem:

$$\varphi_{\text{NBPM}}(t) \cos \omega_0 t = A_0 \sin[\omega_0 t + kx(t)] \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} A_0 \sin|kx(t)| + \frac{1}{2} A_0 \sin[2\omega_0 t + kx(t)]$$

Po filtracji w filtrze poddetekcyjnym otrzymujemy:

$$\psi_0(t) = \frac{1}{2} A_0 \sin|kx(t)|$$

Dla modulacji wąskopasmowej spełniony jest warunek $k|x|_{\max} \ll 1$ i wobec tego:

$$\psi_0(t) \approx \frac{1}{2} A_0 kx(t)$$

Należy zauważyć przesunięcie fazowe o $\pi/2$ sygnałów $\sin|\omega_0 t + kx(t)|$ i $\cos \omega_0 t$. Jest to konieczne dla uzyskania w miarę liniowej charakterystyki demodulacji.

4.1.2. MODULACJE KĄTA FAZOWEGO

Rozwiązanie 1.2.1

Postać czasowa sygnału zmodulowanego FM opisana jest zależnością:

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A_0 \cos \left(\omega_0 t + k_{\text{FM}} \int_0^t x(\tau) d\tau \right)$$

Przyjmujemy, że harmoniczny sygnał modulujący jest opisany zależnością:

$$x(t) = a_m \cos \omega_m t$$

W związku z tym można zapisać, że:

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{k_{\text{FM}} a_m}{\omega_m} \sin \omega_m t \right)$$

Wyznaczamy dewiację fazy:

$$\Delta \Theta_{\text{FM}} = \frac{k_{\text{FM}} a_m}{\omega_m} = \frac{2\pi \Delta f_{\text{FM}}}{2\pi f_m} = \frac{\Delta f_{\text{FM}}}{f_m} = \frac{75 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3} = 15 \text{ rad}$$

Sygnał FM jest opisany zatem zależnością:

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = 5 \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 10^8 t + 15 \sin 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 t)$$

Rozwiązanie 1.2.2

W celu przeprowadzenia analizy mającej na celu określenie typów modulatorów przypomnimy przydatne do tego wzory. Szerokość pasma sygnału wąskopasmowego opisana jest zależnością:

$$B_{\text{NBFM}} = B_{\text{NBPM}} = 2 f_m$$

Tak więc znając jedynie szerokość pasma sygnału zmodulowanego wąskopasmowo, nie można stwierdzić, czy sygnał był zmodulowany częstotliwościowo, czy też fazowo. Kolejnym przydatnym wzorem jest wzór na szerokość pasma sygnału szerokopasmowego:

$$B_{\text{WBFM}} = 2 \Delta f_{\text{FM}}$$

Użytecznymi będą jeszcze wzory pozwalające wyznaczyć szerokość pasma sygnałów zmodulowanych FM i PM (reguła Carsona):

$$B_{\text{FM}} = 2(k_{\text{FM}} a_m + f_m)$$

oraz:

$$B_{\text{PM}} = 2 \left(\frac{k_{\text{PM}} a_m}{f_m} + f_m \right)$$

Przystępujemy zatem do rozpatrywania poszczególnych przypadków:

Ad. 1)

Z analizy danych zawartych w tabeli 2 wynika, że na szerokość pasma sygnału zmodulowanego nie ma wpływu amplituda sygnału modulującego, a jedynie jego częstotliwość. Ponieważ wartość amplitudy ma wpływ na wartość dewiacji częstotliwości zarówno dla FM, jak i PM, dlatego też możemy wywnioskować, że wielkość dewiacji częstotliwości nie ma wpływu na szerokość pasma, co ma miejsce w przypadku, gdy:

$$\Delta f_{\text{FM}} \ll f_m$$

Zatem jest to modulacja wąskopasmowa kąta fazowego.

Ad. 2)

Analizując dane zawarte w tabeli 2 stwierdzamy, że zmiana amplitudy sygnału modulującego ma wpływ na szerokość pasma, tak więc w tym wypadku nie będziemy mieli do czynienia z modulacją wąskopasmową. Można zauważyć, że zmiana częstotliwości sygnału modulującego nie ma wpływu na szerokość pasma, z czego można wyciągnąć dwa wnioski:

- wartość dewiacji częstotliwości nie ulega zmianie,
- częstotliwość sygnału modulującego nie ma bezpośredniego wpływu na szerokość pasma.

Biorąc pod uwagę powyższe wnioski stwierdzamy, że w tym przypadku sygnał był poddany szerokopasmowej modulacji FM.

Ad. 3)

Przeprowadzając podobną analizę jak w podpunkcie 2), w tym przypadku także można stwierdzić, że nie mamy do czynienia z modulacją wąskopasmową. Jedyną różnicą w porównaniu z danymi dotyczącymi przypadku 2) polega na tym, że tutaj zmiana częstotliwości sygnału modulującego spowodowała zmniejszenie się dewiacji częstotliwości (obserwowanej jako efekt zmniejszenia się pasma sygnału zmodulowanego). Można więc stwierdzić, że mamy w tym przypadku do czynienia z szerokopasmową modulacją PM.

Rozwiązanie 1.2.3

Sygnał zmodulowany kątowno można zapisać wzorem:

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A_0 \cos\{\omega_0 t + \Theta_{\text{FM}}[x(t)]\}$$

Dlatego też w sygnale podanym w treści zadania można łatwo wyróżnić sygnał nośny:

$$c(t) = 3 \cos(3\pi \cdot 10^6 t)$$

Z kolei odchyłka kąta fazowego, w zależności od rodzaju modulacji, wyraża się wzorem

$$\Theta_{\text{FM}}(t) = k_{\text{FM}} \int x(t) dt$$

dla modulacji FM oraz:

$$\Theta_{\text{PM}}(t) = k_{\text{PM}} x(t)$$

dla modulacji PM. Na podstawie tych zależności można wyznaczyć wzory opisujące przebieg czasowy sygnału modulującego dla modulacji FM:

$$x(t) = \frac{1}{k_{\text{FM}}} \frac{d\Theta_{\text{FM}}(t)}{dt}$$

oraz dla modulacji PM

$$x(t) = \frac{1}{k_{\text{PM}}} \Theta_{\text{PM}}(t)$$

Biorąc powyższe wzory pod uwagę, jak również podstawiając podane w zadaniu wartości stałych modulatora, możemy zapisać, że dla modulacji FM przebieg czasowy sygnału modulującego opisany jest zależnością:

$$x(t) = 8\pi \cos 4\pi \cdot 10^3 t$$

natomiast dla modulacji PM sygnał modulujący przybiera postać:

$$x(t) = 4 \sin 4\pi \cdot 10^3 t$$

Podsumowując zadanie stwierdzamy, że na podstawie samej postaci czasowej sygnału zmodulowanego kątowno nie jesteśmy w stanie jednoznacznie określić typ modulacji. Typ modulacji (częstotliwościowa lub fazowa) można określić dopiero na podstawie dodatkowej znajomości samego sygnału modulującego lub też wpływu zmian sygnału modulującego na szerokość pasma sygnału zmodulowanego.

Rozwiązanie 1.2.4

W celu wyznaczenia pasma sygnału zmodulowanego posłużymy się regułą Carsona:

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_m = 2(\Delta f_{\text{FM}} + f_m).$$

W pierwszym przypadku, po wstawieniu do powyższego wzoru danych występujących w zadaniu otrzymujemy szerokość pasma sygnału zmodulowanego:

$$B_{\text{FM}}^{(1)} = 2,02 \text{ MHz}$$

Nadajnik pracuje więc w zakresie częstotliwości $98,99 \div 101,01 \text{ MHz}$.

Przystąpmy do obliczeń w drugim przypadku, kiedy amplituda sygnału modulującego wzrasta dwukrotnie. Wiemy, że dla modulacji FM dewiacja częstotliwości jest wprost proporcjonalna do amplitudy sygnału modulującego, zatem:

$$\Delta f_{\text{FM}}^{(2)} = 2\Delta f_{\text{FM}}^{(1)}$$

Wzrost amplitudy pociągnie więc za sobą wzrost szerokości pasma:

$$B_{\text{FM}}^{(2)} = 2(2 \cdot 10^6 + 10^4) = 4,02 \text{ MHz}$$

W tym przypadku nadajnik pracuje w zakresie częstotliwości $97,99 \div 102,01 \text{ MHz}$.

W ostatnim przypadku, kiedy zmianie ulegnie także częstotliwość sygnału modulującego szerokość pasma sygnału zmodulowanego wynosi:

$$B_{\text{FM}}^{(3)} = 2(2 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^4) = 4,04 \text{ MHz}.$$

Tak więc nadajnik pracuje w zakresie częstotliwości $97,98 \div 102,02 \text{ MHz}$.

Rozwiązanie 1.2.5

Zgodnie z regułą Carsona szerokość pasma sygnału zmodulowanego opisana jest zależnością:

$$B_{\text{PM}} = 2(\Delta\Theta_{\text{PM}} + 1)f_m$$

Wstawiając do powyższego wzoru dane z zadania wyznaczamy pasmo sygnału:

$$B_{\text{PM}}^{(1)} = 220 \text{ kHz}$$

Wzór na zależność dewiacji fazy w zależności od dewiacji częstotliwości (częstości) i częstotliwości (częstości) przybiera postać:

$$\Delta\Theta_{\text{PM}} = \frac{\Delta f_{\text{PM}}}{f_m} = \frac{\Delta\omega_{\text{PM}}}{\omega_m}$$

Zatem dewiacja częstotliwości:

$$\Delta f_{\text{PM}} = \Delta\Theta_{\text{PM}} f_m$$

czyli:

$$\Delta f_{\text{PM}}^{(1)} = 100 \text{ kHz}$$

Liczbę prążków istotnych w ogólnym przypadku można wyznaczyć ze wzoru:

$$N = 2(\Delta\Theta_{\text{PM}} + 1)$$

wobec czego dla danych z zadania:

$$N^{(1)} = 22$$

Przy zmianie częstotliwości, posługując się powyższymi wzorami, wyznaczamy szerokość pasma sygnału zmodulowanego dla kolejnego przypadku:

$$B_{\text{PM}}^{(2)} = 110 \text{ kHz}$$

oraz jego dewiację częstotliwości:

$$\Delta f_{\text{PM}}^{(2)} = \Delta \Theta_{\text{PM}}^{(2)} f_m^{(2)}$$

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku modulacji PM wartość dewiacji fazy zależy tylko od amplitudy sygnału modulującego i stałej modulatora, zatem:

$$\Delta \Theta_{\text{PM}}^{(2)} = \Delta \Theta_{\text{PM}}^{(1)}$$

W efekcie uzyskujemy wartość dewiacji częstotliwości równą:

$$\Delta f_{\text{PM}}^{(2)} = 50 \text{ kHz}$$

oraz liczbę prążków istotnych:

$$N^{(2)} = 22$$

W ostatnim przypadku wartość dewiacji fazy wzrasta dwukrotnie wraz ze zmianą amplitudy sygnału modulującego:

$$\Delta \Theta_{\text{PM}}^{(3)} = 2 \Delta \Theta_{\text{PM}}^{(1)}$$

Zatem szerokość pasma sygnału zmodulowanego wynosi:

$$B_{\text{PM}}^{(3)} = 210 \text{ kHz}$$

dewiacja częstotliwości sygnału zmodulowanego:

$$\Delta f_{\text{PM}}^{(3)} = 100 \text{ kHz}$$

natomiast liczba prążków istotnych:

$$N^{(3)} = 44$$

Rozwiązanie 1.2.6

Aby rozwiązać zadanie, konieczne jest wyznaczenie minimalnej i maksymalnej częstotliwości na wyjściu układu modulatorów. Należy zauważyć, że oba sygnały będą miały tę samą szerokość pasma, jedyną różnicą jest częstotliwość środkowa, wokół której te pasma są rozłożone. Zgodnie z regułą Carsona:

$$B_1 = B_2 = 100 \text{ kHz}$$

Zatem sygnał 1 zawiera się w paśmie:

$$B_1 \in [2,95; 3,05] \text{ MHz}$$

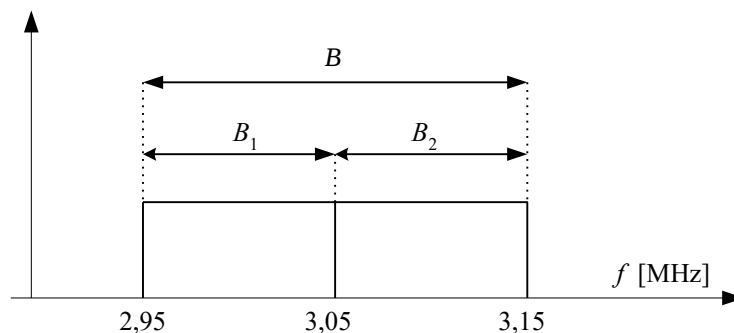
natomiast sygnał 2:

$$B_2 \in [3,05; 3,15] \text{ MHz}$$

Pasmo całego sygnału :

$$B \in [2,95; 3,15] \text{ MHz}$$

o szerokości $B = 200 \text{ kHz}$ przedstawiono na rysunku R.29.



Rysunek R.29

Rozwiązanie 1.2.7

Uwzględniając wartość częstotliwości nośnej stwierdzamy, że sygnał zmodulowany pokryje pasmo $B_{FM} \in [900; 1100]$ kHz. W takim też zakresie częstotliwości pracuje wzmacniacz wyjściowy. Zmniejszenie częstotliwości nośnej o 2% (z 1 MHz do 980 kHz) powoduje przesunięcie całego pasma w kierunku niższych częstotliwości. Zatem sygnał zmodulowany będzie zajmował pasmo:

$$B'_{FM} \in [880; 1080] \text{ kHz}$$

Aby pasmo sygnału zmodulowanego nadal znajdowało się w paśmie wzmacniacza, należy odpowiednio zawęzić pasmo sygnału zmodulowanego. Pasmo sygnału zmodulowanego po zmianie częstotliwości nośnej o 2% powinno zawierać się w zakresie częstotliwości $B''_{FM} \in [900; 1060]$ kHz. Szerokość pasma tego sygnału:

$$B''_{FM} = 160 \text{ kHz}$$

Możemy więc zapisać następujący układ równań:

$$\begin{cases} B_{FM} = 2(k_{FM} a_m + f_m) \\ B''_{FM} = 2(k_{FM} a''_m + f_m) \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy:

$$a''_m = \frac{7}{9} a_m$$

Układ będzie pracować poprawnie po zmianie częstotliwości nośnej o 2%, gdy amplituda sygnału modulującego zostanie obniżona do poziomu $7/9 a_m$.

Rozwiązanie 1.2.8

Zastosowany układ korekcyjny powoduje wzrost dewiacji częstotliwości:

$$\Delta f'_{FM} = 1,25 \Delta f_{FM} = 100 \text{ kHz}$$

Wraz ze wzrostem dewiacji częstotliwości poszerza się pasmo sygnału:

$$B'_{FM} = 2(\Delta f'_{FM} + f_m) = 220 \text{ kHz}$$

Szerokość pasma sygnału zmodulowanego po zastosowaniu układu korekcyjnego jest większa od szerokości pasma wzmacniacza. Oznacza to, że pewien zakres częstotliwości sygnału zmodulowanego zostanie całkowicie wytłumiony, a zatem system nie będzie pracować poprawnie.

Rozwiązanie 1.2.9

Rozważymy wpływ działania powielacza częstotliwości o krotności n na sygnał zmodulowany kątowno. Na wejście powielacza podajemy sygnał postaci:

$$\varphi(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \Theta_{FM}(t)]$$

Na wyjściu powielacza otrzymujemy sygnał opisany zależnością:

$$\varphi_o(t) = A_0 \cos[n\omega_0 t + n\Theta_{\Phi M}(t)]$$

Dla modulacji tonowej mamy:

$$\begin{cases} \varphi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\Theta_{\Phi M} \sin \omega_m t) \\ \varphi_o(t) = A_0 \cos(n\omega_0 t + n\Delta\Theta_{\Phi M} \sin \omega_m t) \end{cases}$$

Analiza widmowa tonowej modulacji kątovej wskazuje, że powielanie częstotliwości nie wpływa na odstęp pomiędzy sąsiednimi prążkami w widmie powielonego sygnału (odstęp jest równy częstości sygnału modulującego ω_m), natomiast zmienia dewiację fazy (częstotliwości), a zatem i szerokość pasma sygnału zmodulowanego. Można też zauważyć, że po przejściu przez kaskadę k powielaczy sygnał wyjściowy będzie miał postać:

$$\varphi_o(t) = A_0 \cos(n\omega_0 t + n\Delta\Theta_{\Phi M} \sin \omega_m t)$$

gdzie $n = n_1 \cdot \dots \cdot n_k$. Korzystając z powyższej obserwacji przystępujemy do rozwiązywania zadania. Sygnał wejściowy kaskady powielaczy zapisujemy w postaci:

$$\varphi(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta f_{\Phi M}}{f_m} \sin \omega_m t\right)$$

Sygnał wyjściowy jest równy:

$$\varphi_o(t) = A_0 \cos\left(n_1 n_2 \omega_0 t + n_1 n_2 \frac{\Delta f_{\Phi M}}{f_m} \sin \omega_m t\right)$$

Zatem dewiacja częstotliwości w powielonym sygnale jest dana zależnością:

$$\Delta f_o = n_1 n_2 \Delta f_{\Phi M}$$

Po wstawieniu danych liczbowych:

$$\Delta f_o = 60 \text{ kHz}$$

Dewiacja fazy na wyjściu kaskady wynosi:

$$\Delta\Theta_o = \frac{\Delta f_{\Phi M}}{f_m} = 12 \text{ rad}$$

Rozwiązanie 1.2.10

Posługując się regułą Carsona wyznaczamy szerokość pasma sygnału zmodulowanego FM:

$$B_{FM}^{(1)} = 2(\Delta f_{FM} + f_m) = 2300 \text{ Hz}$$

Po przejściu przez pierwszy powielacz pasmo jest równe:

$$B_{FM}^{(2)} = 2(n_1 \Delta f_{FM} + f_m) = 6800 \text{ Hz}$$

Na wyjściu całego układu:

$$B_{FM}^{(3)} = 2(n_1 n_2 \Delta f_{FM} + f_m) = 78800 \text{ Hz}$$

Wyznaczamy także liczbę prążków istotnych:

$$N = 2(\Delta\Theta_o + 1) = 2\left(n_1 n_2 \frac{\Delta f_{FM}}{f_m} + 1\right) \approx 80$$

Rozwiązanie 1.2.11

Ad. a)

Reguła Carsona pozwalająca wyznaczyć szerokość pasma wyraża się wzorem:

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_m$$

Dzięki temu możemy obliczyć dewiację fazy (pozostałe wartości w powyższym wzorze są nam znane):

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = 10 \text{ rad}$$

Z kolei, korzystając z zależności między dewiacją fazy a dewiacją częstotliwości, wyznaczamy poszukiwaną dewiację częstotliwości:

$$\Delta f_{\text{FM}} = \Delta\Theta_{\text{FM}} f_m = 50 \text{ kHz}$$

Ad. b)

Korzystając z warunku równości amplitud sygnałów nośnych oraz równości pierwszych harmoniczných sygnałów zmodulowanych otrzymujemy zależność:

$$\frac{mA_0}{2} = A_0 J_1(\Delta\Theta_{\text{FM}})$$

skąd otrzymujemy:

$$m = 2J_1(\Delta\Theta_{\text{FM}})$$

Z tabeli zawierającej wartości funkcji Bessela odczytujemy, że $J_1(10) = 0,04$, dzięki czemu możemy wyliczyć wartość współczynnika głębokości modulacji:

$$m = 0,08$$

Ad. c)

Moc sygnału zmodulowanego częstotliwościowo opisana jest zależnością:

$$P_{\text{FM}} = \frac{A_0^2}{2}$$

Jak wynika z powyższego wzoru, sygnał modulujący nie wpływa na moc sygnału zmodulowanego kątowno. Moc całkowita sygnału zmodulowanego AM wyraża się zależnością:

$$P_{\text{AM}} = \frac{A_0^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

Przy uwzględnieniu założonej w zadaniu równości amplitud sygnałów nośnych dla obu rozpatrywanych typów modulacji prawdziwa jest zależność:

$$P_{\text{AM}} = P_{\text{FM}} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

Ponieważ $m = 0,08$, zatem moc sygnału zmodulowanego częstotliwościowo:

$$P_{\text{FM}} = 9,97 \text{ W}$$

Ad. d)

Moc składowej nośnej w sygnale zmodulowanym to moc prążka o częstotliwości nośnej, dlatego też:

$$P_N = P_{\text{FM}} J_0^2(\Delta\Theta_{\text{FM}})$$

Ponieważ:

$$J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = J_0(10) = -0,25$$

więc:

$$P_N = P_{\text{FM}} (-0,25)^2 = 0,62 \text{ W}$$

Ad. e)

Współczynnik sprawności energetycznej dla tonowej modulacji AM wyraża się wzorem:

$$\mu_{AM} = \frac{m^2}{2 + m^2}$$

Wyznaczona w podpunkcie b) wartość współczynnika głębokości modulacji wynosi $m = 0,08$. Po podstawieniu wyznaczonej wartości do podanego wyżej wzoru otrzymamy wynik:

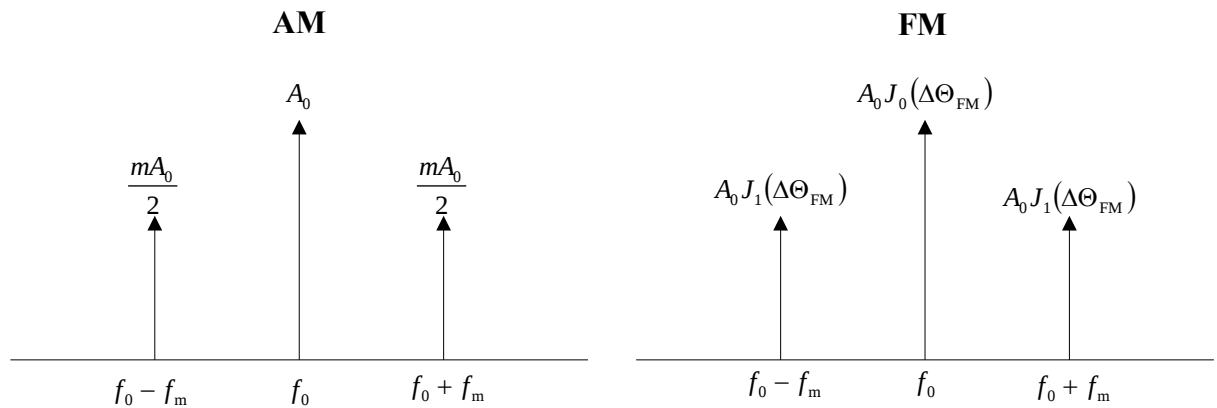
$$\mu_{AM} = 0,32\%$$

Rozwiązanie 1.2.12

Zauważmy przede wszystkim, że równość mocy sygnałów zmodulowanych AM i FM oznacza, że amplitudy sygnałów nośnych są różne.

Ad. a)

Na rysunku R.30 przedstawiono amplitudy pierwszych harmoniczných wstępnych bocznych oraz amplitudy nośnych sygnałów AM i FM.



Rysunek R.30

Korzystając z rysunku R.37 warunek równości amplitud pierwszych harmoniczných można zapisać jako:

$$\frac{mA_{0AM}}{2} = A_{0FM} J_1(\Delta\Theta_{FM})$$

Możemy wyliczyć dewiację fazy, znamy bowiem dewiację częstotliwości i częstotliwość sygnału modulującego:

$$\Delta\Theta_{FM} = \frac{\Delta f_{FM}}{f_m} = 9 \text{ rad}$$

Odczytując z tabeli zawartej w Dodatku A wartości funkcji Bessela pierwszego rodzaju wartość $J_1(9) = 0,25$ można dalej zapisać:

$$A_{0AM} = \frac{A_{0FM}}{2m}$$

Warunek równości mocy sygnałów zmodulowanych $P_{AM} = P_{FM}$ przybiera postać:

$$\frac{A_{0AM}^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right) = \frac{A_{0FM}^2}{2}$$

Po podstawieniu do powyższego wzoru zależności na amplitudę nośnej sygnału AM i jego przekształceniu otrzymujemy ostatecznie poszukiwaną wartość współczynnika głębokości modulacji:

$$m = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

Ad. b)

Współczynnik sprawności energetycznej dla modulacji tonowej AM wyraża się wzorem:

$$\mu_{AM} = \frac{m^2}{2 + m^2}$$

Uwzględniając, że współczynnik głębokości modulacji $m = \sqrt{2/7}$ otrzymujemy:

$$\mu_{AM} = \frac{1}{8}$$

Rozwiązanie 1.2.13

Zauważmy, że miejsce przecięcia się wykresu z osią pionową, po pomnożeniu przez rozdzielczość pionową oscyloskopu, pozwoli nam wyznaczyć amplitudę sygnału nośnego dla modulacji AM. Wynika to z zależności:

$$A_{0AM}(1 + mx)|_{x=0} = A_{0AM}$$

Wobec tego amplituda sygnału nośnego modulacji AM:

$$A_{0AM} = 4 \text{ V}$$

Możemy także znaleźć współczynnik głębokości modulacji stosując zależność:

$$m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}$$

W przypadku analizowanego zadania wartości $U_{\max}$ i $U_{\min}$ wyznaczymy jako iloczyn liczby działek oraz rozdzielczości pionowej oscyloskopu. Dla wartości $U_{\max}$ liczba działek wynosi 6, podczas gdy dla $U_{\min}$ liczba działek jest równa 2. Zatem:

$$\begin{cases} U_{\max} = 6C_y = 6 \cdot 2 = 12 \text{ V} \\ U_{\min} = -2C_y = -2 \cdot 2 = -4 \text{ V} \end{cases}$$

Wstawiając wyznaczone wartości do wzoru uzyskujemy:

$$m = 2$$

Moc sygnału zmodulowanego AM opisana wzorem:

$$P_{AM} = \frac{A_{0AM}^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

po podstawieniu danych wynosi:

$$P_{AM} = 24 \text{ W}$$

Korzystając z warunku równości mocy sygnałów zmodulowanych $P_{AM} = P_{FM}$ otrzymujemy równanie:

$$P_{AM} = \frac{A_{0FM}^2}{2}$$

z którego wyznaczamy wartość amplitudy nośnej w systemie FM:

$$A_{0FM} = 4\sqrt{3} \text{ V}$$

Dewiację fazy wyznaczmy ze wzoru:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = \frac{k_{\text{FM}} a_m}{f_m}$$

Ponieważ amplituda sygnału modulującego jest jednostkowa ($a_m = 4 \cdot C_x = 1 \text{ V}$), dlatego też po podstawieniu danych:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = 9 \text{ rad}$$

Zatem moc pierwszych harmoniczych (o częstotliwościach $f_0 \pm f_m$) sygnału AM wynosi:

$$P_{\text{1AM}} = P_{\text{B}} = \frac{m^2 A_{\text{0AM}}^2}{4} = 16 \text{ W}$$

natomiast moc pierwszych harmoniczych (o częstotliwościach $f_0 \pm f_m$) sygnału FM jest równa:

$$P_{\text{1FM}} = 2 \frac{A_{\text{0FM}}^2 J_1^2(9)}{2} = 3 \text{ W}$$

Szerokość pasma sygnału zmodulowanego FM, zgodnie z regułą Carsona, wynosi:

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_m = 100 \text{ kHz}$$

Rozwiązanie 1.2.14

Wzór pozwalający wyznaczyć szerokość pasma w zależności od liczby prążków istotnych ma postać:

$$B_{\text{FM}} = 2N(\Delta\Theta_{\text{FM}})f_m$$

gdzie przyjmujemy, że $N(\Delta\Theta_{\text{FM}})$ jest liczbą prążków istotnych. Wyznaczamy dewiację fazy:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = \frac{\Delta f_{\text{FM}}}{f_m} = 15 \text{ rad}$$

Korzystając z wykresu zamieszczonego w Dodatku C przedstawiającego kryterium mocowe stwierdzamy, że kryterium 98% mocy jest spełnione dla:

$$N(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = \Delta\Theta_{\text{FM}} + 1$$

a więc w rozważanym przypadku:

$$N(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = 16$$

Stwierdzamy, że 98% mocy sygnału zmodulowanego zawierają częstotliwości leżące w paśmie o szerokości:

$$B_{\text{FM}} = 160 \text{ kHz}$$

które zawiera się w przedziale 89,92÷90,08 MHz.

Rozwiązanie 1.2.15

Wzór pozwalający wyznaczyć amplitudę n -tej harmoniczej sygnału FM dany jest zależnością:

$$A_n = A_0 J_n(\Delta\Theta_{\text{FM}})$$

gdzie $J_n(\cdot)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju, n -tego rzędu. Funkcje Bessela spełniają zależność:

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$$

pozwalającą wyznaczyć ich wartości dla ujemnych argumentów $x < 0$. Postać czasowa tonowej modulacji częstotliwości opisana jest zależnością:

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\Theta_{\text{FM}} \sin \omega_m t).$$

Porównując dany w zadaniu sygnał z postacią ogólną stwierdzamy, że:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = 3 \text{ rad}$$

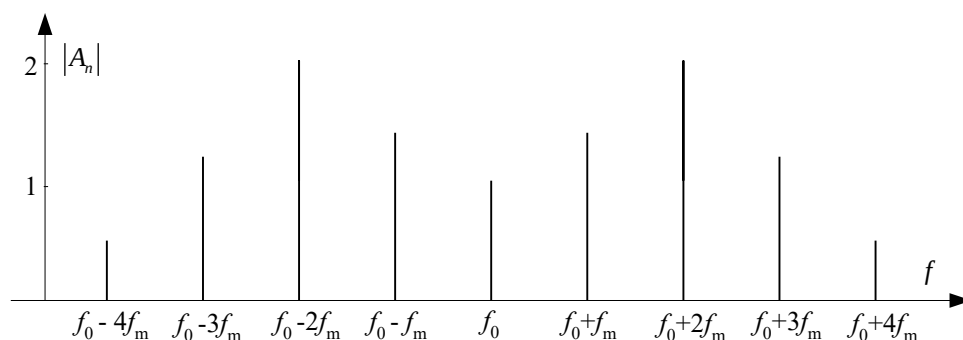
Liczba prążków istotnych dla kryterium amplitudowego $\varepsilon = 0,05$ (uwzględniamy wyłącznie prążki znajdujące się po prawej lub lewej stronie częstotliwości nośnej o amplitudzie większej od 5% amplitudy sygnału nośnego) możemy zapisać, że:

$$N(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = \Delta\Theta_{\text{FM}} + 1 = 4$$

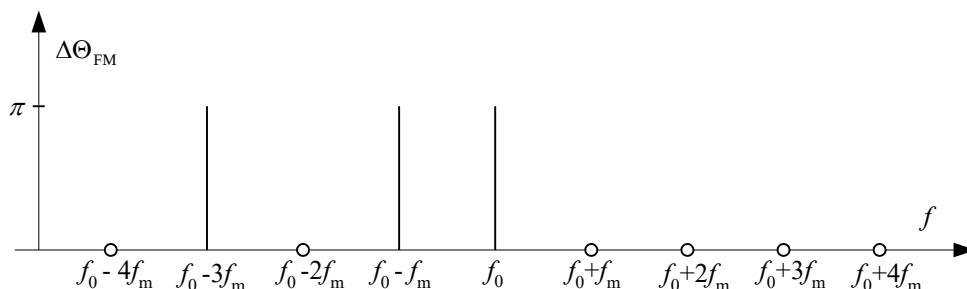
Obliczamy amplitudy poszczególnych harmoniczych. Znak „-” (minus) przed amplitudą danej składowej oznacza, że znajduje się ona w przeciwfazie (jest przesunięta o π w stosunku do pozostałych składowych):

- $n = -4 \Rightarrow A_{-4} = (-1)^4 A_0 J_4(3) = 4 \cdot 0,13 = 0,52 \text{ V}$
- $n = -3 \Rightarrow A_{-3} = (-1)^3 A_0 J_3(3) = -4 \cdot 0,31 = -1,24 \text{ V}$
- $n = -2 \Rightarrow A_{-2} = (-1)^2 A_0 J_2(3) = 4 \cdot 0,49 = 1,96 \text{ V}$
- $n = -1 \Rightarrow A_{-1} = (-1)^1 A_0 J_1(3) = -4 \cdot 0,34 = -1,36 \text{ V}$
- $n = 0 \Rightarrow A_0 = A_0 J_0(3) = 4 \cdot (-0,26) = -1,04 \text{ V}$
- $n = 1 \Rightarrow A_1 = A_0 J_1(3) = 4 \cdot 0,34 = 1,36 \text{ V}$
- $n = 2 \Rightarrow A_2 = A_0 J_2(3) = 4 \cdot 0,49 = 1,96 \text{ V}$
- $n = 3 \Rightarrow A_3 = A_0 J_3(3) = 4 \cdot 0,31 = 1,24 \text{ V}$
- $n = 4 \Rightarrow A_4 = A_0 J_4(3) = 4 \cdot 0,13 = 0,52 \text{ V}$

Na rysunku R.31 przedstawiona została charakterystyka amplitudowa, natomiast na rysunku R.32 charakterystyka fazowa sygnału zmodulowanego FM.



Rysunek R.31: Charakterystyka amplitudowa



Rysunek R.32: Charakterystyka fazowa

Rozwiązanie 1.2.16

Z analizy danych zawartych w zadaniu wynika, że mamy do czynienia z modulacją tonową, dlatego też możemy zapisać następującą zależność:

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\Theta_{\text{FM}} \sin \omega_m t)$$

Nie znamy ani dewiacji fazy ani amplitudy sygnału zmodulowanego. Dewiację fazy można obliczyć korzystając z własności funkcji Bessela opisanej zależnością:

$$J_{n-1}(-\Delta\Theta_{\text{FM}}) + J_{n+1}(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = \frac{2n}{\Delta\Theta_{\text{FM}}} J_n(\Delta\Theta_{\text{FM}})$$

Po podstawieniu podanych wartości liczbowych otrzymujemy:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} \approx 0,6 \text{ rad}$$

Wartość amplitudy można wyznaczyć ze wzoru na moc sygnału zmodulowanego FM:

$$P_{\text{FM}} = \frac{A_0^2}{2}$$

skąd wyznaczamy amplitudę sygnału nośnego:

$$A_0 = 10 \text{ V}$$

Zależność opisująca sygnał zmodulowany FM przybiera zatem postać:

$$\varphi_{\text{FM}}(t) = 10 \cos(10^6 t + 0,6 \sin 10^4 t)$$

Szerokość pasma analizowanego sygnału wyznaczymy korzystając z reguły Carsona:

$$W_{\text{FM}} = 2(\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)\omega_m$$

Wstawiając wartości liczbowe otrzymujemy:

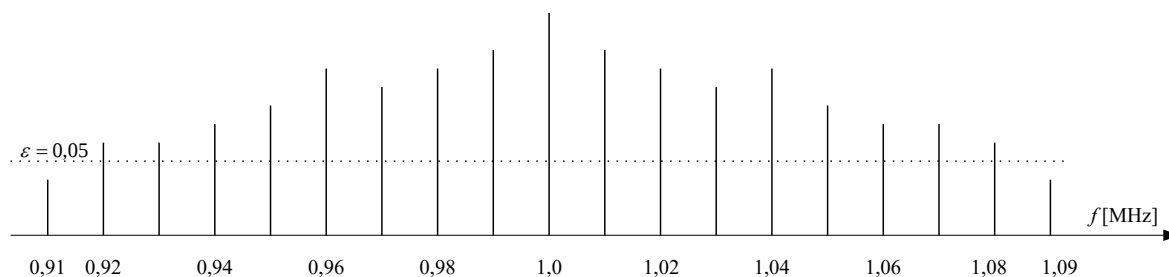
$$W_{\text{FM}} = 32 \text{ krad/s}$$

Rozwiązanie 1.2.17

Zmierzona odległość między prążkami jest równa częstotliwości sygnału modulującego, zatem:

$$f_m = 10 \text{ kHz}$$

Kolejne spostrzeżenie dotyczy liczby prążków istotnych. Na podstawie danych zawartych w zadaniu wnioskujemy, że należy zastosować kryterium amplitudowe $\varepsilon = 0,05$. W celu zobrazowania sytuacji przedstawiono poglądowy rysunek R.33 (wysokości poszczególnych prążków przyjęto arbitralnie).



Rysunek R.33

Z rysunku R.33 wynika, że liczba prążków istotnych $N(\Delta\Theta_{\text{FM}})=8$. Z wykresu przedstawiającego kryterium amplitudowe zamieszczonego w Dodatku B odczytujemy dewiację fazy dla kryterium amplitudowego $\varepsilon = 0,05$:

$$N(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = \Delta\Theta_{\text{FM}} + 2 = 8$$

skąd otrzymujemy dewiację fazy:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = 6 \text{ rad}$$

Znajomość dewiacji fazy i częstotliwości sygnału modulującego pozwala nam wyznaczyć dewiację częstotliwości:

$$\Delta f_{\text{FM}} = \Delta\Theta_{\text{FM}} f_m = 60 \text{ kHz}$$

Ponadto wiemy, że jednoczesna zmiana amplitudy sygnału modulującego i jego częstotliwości nie zmienia wartości dewiacji fazy, co jest możliwe wyłącznie dla modulacji FM, ponieważ:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = \frac{k_{\text{FM}} a_m}{f_m}$$

Posługując się powyższą zależnością wyznaczamy amplitudę sygnału modulującego:

$$a_m = 6 \text{ V}$$

Rozwiązanie 1.2.18

Dewiacja częstotliwości $\Delta f_{\text{FM}} = 0$ oznacza brak modulacji, wobec tego cała moc będzie skupiona w prążku o częstotliwości f_0 . Jest to przypadek, w którym sygnał modulujący ma wartość zerową, zatem emitowany jest tylko sygnał nośny. Ponieważ znamy moc sygnału FM, więc możemy obliczyć jego amplitudę:

$$P_{\text{FM}} = \frac{A_0^2}{2}$$

zatem:

$$A_0 = 10\sqrt{2} \text{ V}$$

Zauważmy, że wraz ze wzrostem wartości dewiacji fazy wartość funkcji Bessela $J_1(\Delta\Theta_{\text{FM}})$ najpierw wzrasta, potem zaś zaczyna maleć do zera. Z pewnym przybliżeniem można przyjąć, że $J_1(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = 0$ dla $\Delta\Theta_{\text{FM}} = 3,8$. Dla tej wartości dewiacji fazy wartość funkcji Bessela pierwszego rzędu $J_0(3,8) = -0,4$. Moc prążka o częstotliwości nośnej:

$$P_N = \frac{A_0^2 J_0^2(\Delta\Theta_{\text{FM}})}{2} = \frac{A_0^2 J_0^2(3,8)}{2} = 16 \text{ W}$$

Moc prążków bocznych obliczamy z bilansu mocy:

$$P_B = P_{\text{FM}} - P_N = 84 \text{ W}$$

Rozwiązanie 1.2.19

Moc częstotliwości nośnej sygnału wyraża się wzorem:

$$P_N = \frac{A_0^2 J_0^2(\Delta\Theta_{\text{FM}})}{2}$$

wobec tego:

$$J_0^2(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = \frac{2P_N}{A_0^2}$$

Po krótkich przekształceniach:

$$|J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}})| = \sqrt{\frac{2P_N}{A_0^2}} = \frac{\sqrt{2P_N}}{A_0}$$

Pamiętając o tym, że wartość funkcji Bessela zerowego rzędu jest ujemna można zapisać:

$$J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = -\frac{\sqrt{2P_N}}{A_0} = -\frac{\sqrt{2 \cdot 32}}{20} = -0,4$$

Analizując tabelę wartości funkcji Bessela można zauważyć, że wartość $J_0(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = -0,4$ przyjmowana jest dla dwóch wartości dewiacji fazy: $\Delta\Theta_{\text{FM}} = 3,8$ oraz $\Delta\Theta_{\text{FM}} = 4$. Jednakże tylko w drugim przypadku wartość funkcji Bessela pierwszego rzędu jest także ujemna, dlatego też przyjmujemy:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = 4 \text{ rad}$$

Z reguły Carsona pozwalającej wyznaczyć szerokość pasma sygnału zmodulowanego częstotliwościowo:

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_m$$

wnioskujemy, że zakres częstotliwości analizowanego sygnału znajduje się w przedziale:

$$B_{\text{FM}} \in [f_0 - (\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_m; f_0 + (\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_m]$$

Zakres częstotliwości sygnału zmodulowanego nie powinien wykraczać poza pasmo wzmacniacza. Można zatem zapisać układ nierówności:

$$\begin{cases} f_0 - (\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_m \geq f_{\min} \\ f_0 + (\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_m \leq f_{\max} \end{cases}$$

gdzie $f_{\min}$ oraz $f_{\max}$ oznaczają odpowiednio dolną i górną częstotliwość pasma przepustowego wzmacniacza. Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy:

$$\begin{cases} f_m \leq 2 \cdot 10^4 \\ f_m \leq 6 \cdot 10^4 \end{cases}$$

Stwierdzamy, że układ modulator-wzmacniacz będzie pracować poprawnie, gdy częstotliwość sygnału modulującego:

$$f_m \leq 20 \text{ kHz}$$

Rozwiązanie 1.2.20

Ad. a)

Szerokość pasma sygnału zmodulowanego częstotliwościowo opisana jest zależnością:

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta f_{\text{FM}} + f_m)$$

Dewiacja częstotliwości dla systemu FM wyraża się natomiast wzorem:

$$\Delta f_{\text{FM}} = k_{\text{FM}} a_m = 500 \text{ kHz}$$

Szerokość pasma sygnału zmodulowanego jest równa:

$$B_{\text{FM}}^{(a)} = 1,2 \text{ MHz}$$

Ad. b)

Dewiacja fazy wynosi:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = \frac{k_{\text{FM}} a_m}{f_m} = 5 \text{ rad}$$

Dla wyznaczonej dewiacji fazy kryterium amplitudowe $\varepsilon = 0,01$ jest spełnione dla prążków istotnych w liczbie:

$$N(\Delta\Theta_{\text{FM}}) = 8$$

Zatem szerokość pasma:

$$B_{\text{FM}}^{(b)} = 2N(\Delta\Theta_{\text{FM}})f_m = 1,6 \text{ MHz}$$

Ad. c)

Wzrost amplitudy oznacza wzrost zarówno dewiacji częstotliwości, jak i dewiacji fazy:

$$\Delta f_{\text{FM}}^{(c)} = k_{\text{FM}} a_m^{(c)} = 2k_{\text{FM}} a_m = 1 \text{ MHz}$$

Korzystając z reguły Carsona:

$$B_{\text{FM}}^{(ca)} = 2(\Delta f_{\text{FM}}^{(c)} + f_m)$$

wyznaczamy szerokość pasma sygnału po zmianie amplitudy:

$$B_{\text{FM}}^{(ca)} = 2,2 \text{ MHz}$$

Dewiacja fazy przy dwukrotnym zwiększeniu amplitudy również wzrośnie dwukrotnie:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}}^{(c)} = 10 \text{ rad}$$

Korzystając z kryterium amplitudowego ($\varepsilon = 0,01$) wyznaczamy liczbę prążków istotnych:

$$N(\Delta\Theta_{\text{FM}}^{(c)}) = 14$$

Tak więc szerokość pasma w tym przypadku:

$$B_{\text{FM}}^{(cb)} = 2,8 \text{ MHz}$$

Ad. d)

W przypadku modulacji FM zmiana częstotliwości sygnału modulującego nie ma wpływu na dewiację częstotliwości, zatem:

$$\Delta f_{\text{FM}}^{(d)} = \Delta f_{\text{FM}} = 500 \text{ kHz}$$

Częstotliwość sygnału modulującego wzrasta dwukrotnie:

$$f_m^{(da)} = 2f_m = 200 \text{ kHz}$$

Tak więc szerokość pasma wyznaczona z wykorzystaniem reguły Carsona:

$$B_{\text{FM}}^{(da)} = 2(\Delta f_{\text{FM}} + f_m^{(da)})$$

wynosi:

$$B_{\text{FM}}^{(da)} = 1,4 \text{ MHz}$$

Po dwukrotnym zwiększeniu częstotliwości sygnału modulującego dewiacja fazy wyniesie:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}}^{(db)} = 2,5 \text{ rad}$$

Korzystając z kryterium amplitudowego ($\varepsilon = 0,01$) wyznaczamy liczbę prążków istotnych:

$$N(\Delta\Theta_{\text{FM}}^{(db)}) = 6$$

Zatem szerokość pasma w tym przypadku:

$$B_{\text{FM}}^{(db)} = 1,2 \text{ MHz}$$

Rozwiązanie 1.2.21

Szerokość pasma sygnału modulacji AM wynosi:

$$B_{AM} = 2f_m$$

Wobec tego dla warunków zadania:

$$\Delta f_{FM} = 8f_m$$

Korzystając z tej zależności wyznaczamy dewiację fazy:

$$\Delta\Theta_{FM} = \frac{\Delta f_{FM}}{f_m} = \frac{8f_m}{f_m} = 8 \text{ rad}$$

Współczynnik głębokości modulacji wyznaczamy porównując amplitudy pierwszych harmonicznych:

$$\frac{mA_0}{2} = A_0 J_1(\Delta\Theta_{FM})$$

W rozważanym przypadku:

$$J_1(\Delta\Theta_{FM}) = J_1(8) = 0,23$$

zatem:

$$m = 0,46$$

Szerokość pasma sygnału FM wyznaczamy korzystając z reguły Carsona. Zatem:

$$B_{FM} = 90 \text{ kHz}$$

Moc całkowita sygnału FM wynosi:

$$P_{FM} = \frac{A_0^2}{2} = 50 \text{ W}$$

Moc prążka o częstotliwości nośnej opisana zależnością:

$$P_N = \frac{A_0^2 J_0^2(\Delta\Theta_{FM})}{2}$$

dla wartości funkcji Bessela $J_0(8) = 0,17$ przyjmuje wartość:

$$P_N = 1,445 \text{ W}$$

Rozwiązanie 1.2.22

Zależność opisująca częstotliwość sygnału wyjściowego układu rezonansowego w zależności od pojemności $C(t)$ i indukcyjności L jest określona wzorem:

$$\omega_{FM}(t) = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}}$$

Uwzględniając, że całkowita pojemność układu $C(t) = C_0 - \Delta C x(t)$, gdzie C_0 jest całkowitą pojemnością układu przy braku modulacji, ΔC jest maksymalną zmianą pojemności, a $x(t)$ sygnałem modulującym o jednostkowej amplitudzie, zależność opisującą częstotliwość chwilową obwodu rezonansowego LC można zapisać jako:

$$\omega_{FM}(t) = \frac{1}{\sqrt{L [C_0 - \Delta C x(t)]}}$$

Częstotliwość rezonansowa układu LC wyraża się wzorem:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}$$

Uwzględniając powyższe wnioski możemy zapisać:

$$\omega_{\text{FM}}(t) = \frac{1}{\sqrt{LC_0 \left[1 - \frac{\Delta C}{C_0} x(t) \right]}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{\Delta C}{C_0} x(t)}}$$

Korzystając z rozwinięcia zależności $\omega(t)$ w szereg Taylora oraz przyjmując przybliżenie:

$$(1 - \alpha z)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\alpha z}{2}$$

przy założeniu, że $\alpha z \ll 1$ (w przypadku analizowanego problemu oznacza to, że $\Delta C/C_0 \ll 1$), zależność opisująca częstość chwilową sygnału wyjściowego układu rezonansowego wyraża się przybliżonym wzorem:

$$\omega_{\text{FM}}(t) = \omega_0 + \frac{\omega_0 \Delta C}{2C_0} x(t)$$

Dewiacja częstości wyraża się wzorem:

$$\Delta \omega_{\text{FM}} = \frac{\omega_0 \Delta C}{2C_0}$$

Rozwiązanie 1.2.23

W celu znalezienia szerokości pasma na wyjściu powielacza częstotliwości posłużymy się regułą Carsona:

$$B_p = 2(\Delta \Theta_p + 1)f_m$$

Częstotliwość sygnału modulującego:

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = 15 \text{ kHz}$$

Częstotliwość rezonansowa układu LC wynosi:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} = 10 \text{ Mrad/s}$$

Korzystając z zależności wyprowadzonej w zadaniu 1.2.22 możemy zapisać:

$$\omega_{\text{FM}}(t) = \omega_0 + \frac{\omega_0 \Delta C}{2C_0} x(t)$$

Aby znaleźć kąt fazowy modulacji należy wyznaczyć całkę z powyższego wyrażenia:

$$\theta(t) = \int \omega_{\text{FM}}(t) dt = \omega_0 t + \frac{\omega_0 \Delta C}{2C_0} \int x(t) dt$$

Dla sygnału modulującego $x(t) = \cos \omega_m t$ kąt fazowy modulacji przyjmie postać:

$$\theta(t) = \omega_0 t - \frac{\omega_0 \Delta C}{2C_0 \omega_m} \sin \omega_m t$$

Zatem dewiacja fazy sygnału FM wynosi:

$$\Delta \Theta_{\text{FM}} = \frac{\omega_0 \Delta C}{2C_0 \omega_m} = \frac{1}{3} \text{ rad}$$

Sygnał zmodulowany FM jest sygnałem wejściowym powielacza częstotliwości o krotności powielania n . Krotność powielania wyznaczamy jako stosunek częstości nośnej na wyjściu powielacza do częstości rezonansowej ω_0 bezpośredniego modulatora FM :

$$n = \frac{150 \text{ Mrad/s}}{10 \text{ Mrad/s}} = 15$$

Poszukiwana wartość dewiacji fazy sygnału wyjściowego powielacza wynosi:

$$\Delta\Theta_p = n\Delta\Theta_{FM} = 5 \text{ rad}$$

Szerokość pasma sygnału wyjściowego powielacza jest równa:

$$B_p = 2(\Delta\Theta_p + 1)f_m = 2(n\Delta\Theta_{FM} + 1)f_m = 180 \text{ kHz}$$

Rozwiązanie 1.2.24

Znając szerokość pasma i posługując się regułą Carsona wyznaczamy dewiację fazy sygnału na wyjściu układu powielacza częstotliwości:

$$\Delta\Theta_p = \frac{W_p - 2\omega_m}{2\omega_m} = 5$$

Częstotliwość nośna modulatora FM wynosi $\omega_0 = 10 \text{ Mrad/s}$, tak więc krotność powielania:

$$n = \frac{150 \text{ Mrad/s}}{\omega_0} = 15$$

Dewiacja fazy na wyjściu bezpośredniego modulatora FM:

$$\Delta\Theta_{FM} = \frac{\Delta\Theta_p}{n} = \frac{1}{3} \text{ rad}$$

Dla modulacji FM słuszna jest zależność:

$$\Delta\Theta_{FM} = \frac{k_{FM}a_m}{\omega_m}$$

jeśli stała modulatora wyrażona jest w rad/Vs. Ponieważ znamy dewiację fazy oraz parametry sygnału modulującego (amplituda i częstość), to stała modulatora:

$$k_{FM} = \frac{\Delta\Theta_{FM}\omega_m}{a_m} = 5\pi \text{ krad/Vs}$$

Rozwiązanie 1.2.25

Wyznaczamy maksymalną wartość dewiacji częstotliwości na wyjściu wąskopasmowego modulatora fazy. Przy najniższej częstotliwości modulującej 50 Hz dewiacja częstotliwości na wyjściu wąskopasmowego modulatora fazy wynosi:

$$\Delta f_{PM} = 50 \cdot 0,5 = 25 \text{ Hz}$$

a przy najwyższej częstotliwości modulującej 15 kHz jest równa:

$$\Delta f_{PM} = 15 \cdot 10^3 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ kHz}$$

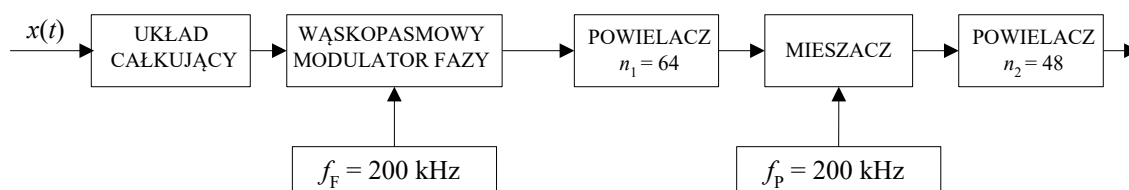
W celu uzyskania minimalnej dewiacji częstotliwości na wyjściu nadajnika równej $\Delta f_{FM} = 75 \text{ kHz}$ należy zapewnić, aby dla każdej częstotliwości zawartej w sygnale modulującym ten warunek był spełniony. Krytyczna sytuacja występuje dla częstotliwości 50 Hz, dla której dewiacja częstotliwości na wyjściu wąskopasmowego modulatora fazy wynosi zaledwie 25 Hz. W celu uzyskania wymaganej dewiacji częstotliwości należy zastosować powielacz częstotliwości. Dla analizowanego problemu niezbędna krotność powielania wynosi:

$$n = \frac{75 \cdot 10^3}{25} = 3000$$

Przy takim współczynniku powielenia występuje znaczne powiększenie częstotliwości nośnej:

$$f_0 = n f_F = 3000 \cdot 200 \cdot 10^3 = 600 \text{ MHz}$$

Otrzymana częstotliwość nośna jest dużo wyższa od żądanej częstotliwości 91,2 MHz. Rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie dwustopniowego układu powielania współpracującego z mieszaczem częstotliwości, pokazanego na rysunku R.34.



Rysunek R.34

Mieszacz częstotliwości pozwala na obniżenie częstotliwości nośnej sygnału bez zmiany dewiacji częstotliwości. Niech n_1 i n_2 oznaczają odpowiednie krotności powielania powielaczy częstotliwości, przy czym zgodnie z warunkami zadania żądamy, aby $n_1 n_2 \geq 3000$. Częstotliwość nośna $n_1 f_F$ sygnału na wyjściu pierwszego powielacza częstotliwości zostaje przesunięta w dół do wartości $(n_1 f_F - f_P)$ poprzez zmieszanie z sygnałem o częstotliwości $f_P = 10,9 \text{ MHz}$ dostarczanym przez drugi generator. Częstotliwość nośna sygnału na wejściu drugiego powielacza częstotliwości musi być równa f_0/n_2 . Porównując te częstotliwości otrzymujemy równanie:

$$n_1 f_F - f_P = \frac{f_0}{n_2}$$

Uwzględniając powyższe spostrzeżenia otrzymujemy układ zależności:

$$\begin{cases} n_1 f_F - f_P = \frac{f_0}{n_2} \\ n_1 n_2 \geq 3000 \end{cases}$$

W tabeli 3 przedstawiono wartości częstotliwości nośnej i dewiacji częstotliwości w różnych punktach pośredniego modulatora FM.

Tabela 3. Wartości częstotliwości nośnej i dewiacji częstotliwości w różnych punktach pośredniego modulatora FM

	Wyjście modulatora fazy	Wyjście pierwszego powielacza częstotliwości	Wyjście mieszacza	Wyjście drugiego powielacza częstotliwości
Częstotliwość nośna	200 kHz	12,8 MHz	1,9 MHz	91,2 MHz
Dewiacja częstotliwości	25 Hz	1,6 kHz	1,6 kHz	75 kHz

Współczynnik powielenia w skorygowanym układzie wynosi:

$$n_1 n_2 = 64 \cdot 48 = 3072$$

a więc różni się nieznacznie od wymaganego współczynnika powielenia $n = 3000$.

Rozwiązanie 1.2.26

Sygnał zmodulowany kątowno opisany jest zależnością:

$$\varphi_{\Phi M}(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\Theta_{\Phi M} \sin \omega_m t)$$

Sygnał $v(t)$ podawany na płytce odchyłania pionowego oscyloskopu przyjmie zatem postać:

$$\begin{aligned} v(t) &= A_0 \cos \omega_0 t - \varphi_{\Phi M}(t) = A_0 \cos \omega_0 t - A_0 \cos(\omega_0 t + \Delta\Theta_{\Phi M} \sin \omega_m t) = \\ &= 2A_0 \sin\left(\frac{\Delta\Theta_{\Phi M}}{2} \sin \omega_m t\right) \sin\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\Theta_{\Phi M}}{2} \sin \omega_m t\right) \end{aligned}$$

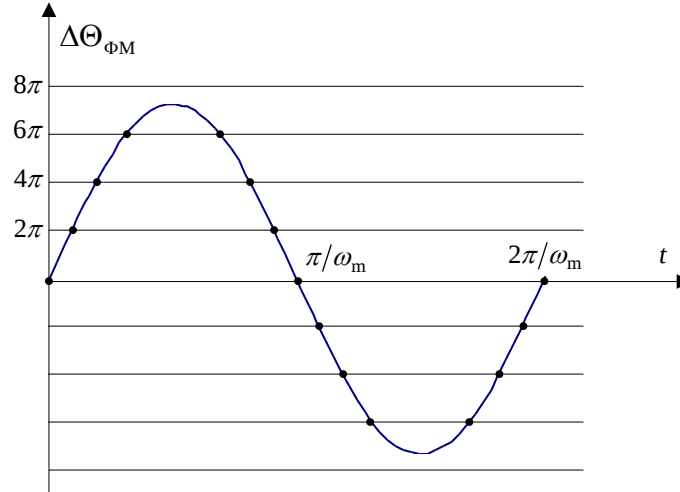
Jest to sygnał z modulacją zarówno amplitudy jak i kąta fazowego. Obwiednia tego sygnału opisana jest zależnością:

$$e(t) = \left| \sin\left(\frac{\Delta\Theta_{\Phi M}}{2} \sin \omega_m t\right) \right|$$

Wartość dewiacji fazy można oszacować zliczając liczbę n punktów zerowych obwiedni za okres sygnału modulującego, $t \in [0, 2\pi/\omega_m)$. Miejsca zerowe obwiedni dane są równaniem:

$$\Delta\Theta_{\Phi M} \sin \omega_m t = 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Na rysunku R.35 przedstawiono w sposób poglądowy wyznaczanie liczby miejsc zerowych obwiedni.

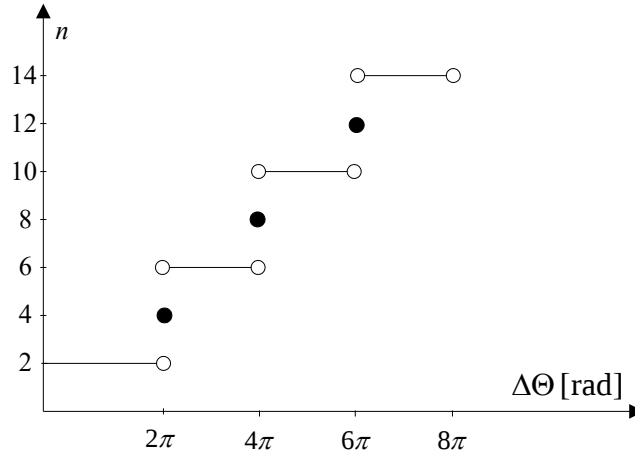


Rysunek R.35

Liczba miejsc zerowych dla przypadku zilustrowanego na rysunku R.35 wynosi $n = 14$, zatem stwierdzamy, że dewiacja fazy sygnału zmodulowanego kątowno spełnia nierówność:

$$6\pi \leq \Delta\Theta_{\Phi M} \leq 8\pi$$

Wykres przedstawiony na rysunku R.36 pokazuje zależność liczby miejsc zerowych w funkcji dewiacji fazy.



Rysunek R.36

Stwierdzamy, że liczba miejsc zerowych obwiedni sygnału $v(t)$ podawanego na płytce odchyłania pionowego oscyloskopu pozwala wyznaczyć dokładną wartość lub też wyznaczyć przedział, w jakim znajduje się dewiacja fazy sygnału zmodulowanego kątowno $\varphi_{\Phi M}(t)$.

Rozwiązanie 1.2.27

Liniowa modulacja częstotliwości polega na tym, że zmiany częstotliwości są proporcjonalne do sygnału modulującego. Można wyróżnić dwa skrajne przypadki modulacji częstotliwości. Jednym z nich jest tzw. modulacja „powolna” lub adiabaticzna, zwana również szerokopasmową modulacją częstotliwości. Przypadek ten ma miejsce, gdy dewiacja fazy $\Delta\Theta_{FM} \gg 1$, a więc gdy częstotliwość chwilowa sygnału FM zmienia się powoli w dużym zakresie. Dla tej odmiany modulacji częstotliwości stosuje się twierdzenie Woodwarda mówiące, że dla $\Delta\Theta_{FM} \rightarrow \infty$ kształt widma gęstości mocy sygnału FM jest wyznaczany przez rozkład prawdopodobieństwa wartości sygnału modulującego.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa sygnału harmonicznego określa prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wartości sygnału w dowolnej chwili są zawarte w określonym przedziale. Jeżeli rozpatrzmy realizację sygnału harmonicznego, to prawdopodobieństwo tego, że wartości sygnału $x(t)$ należą do przedziału $(x, x + \Delta x)$, można znaleźć wyznaczając stosunek:

$$\frac{T_x}{T}$$

gdzie:

- T_x – suma długości przedziałów czasowych, w których wartości sygnału $x(t)$ znajdują się w przedziale $(x, x + \Delta x)$
- T – czas trwania obserwacji

Jeżeli czas obserwacji T będzie zmierzać do nieskończoności, $T \rightarrow \infty$, to wyrażenie T_x/T coraz dokładniej opisuje prawdopodobieństwo takiego zdarzenia. Powyższe stwierdzenie można zapisać następująco:

$$\Pr[x < x(t) \leq x + \Delta x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T}$$

Przy dostatecznie małych wartościach Δx (w granicy $\Delta x \rightarrow 0$) można określić funkcję zwaną funkcją gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$:

$$\Pr[x < x(t) \leq x + \Delta x] \cong p(x) \Delta x$$

Dokładniej wyrażenie określające $p(x)$ można zapisać w następujący sposób:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Pr[x < x(t) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} \right]$$

Obliczamy więc funkcję gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$ sygnału harmonicznego w oparciu o powyższą definicję. Niech harmoniczny sygnał modulujący będzie opisany wzorem $x(t) = a_m \sin \omega_m t$, wówczas:

$$T_x = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\Delta t$$

Aby wyznaczyć długość przedziału Δt przekształcimy sygnał harmoniczny do postaci:

$$t = \frac{1}{\omega_m} \arcsin \frac{x}{a_m}$$

Wielkość Δt wyznaczamy jako:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

gdzie:

$$t_1 = \frac{1}{\omega_m} \arcsin \frac{x}{a_m}$$

natomiast:

$$t_2 = \frac{1}{\omega_m} \arcsin \frac{x + \Delta x}{a_m}$$

Tak więc:

$$\Delta t = \frac{1}{\omega_m} \left(\arcsin \frac{x + \Delta x}{a_m} - \arcsin \frac{x}{a_m} \right)$$

oraz:

$$T_x = \frac{2}{\omega_m} \left(\arcsin \frac{x + \Delta x}{a_m} - \arcsin \frac{x}{a_m} \right)$$

Przyjmując $\omega_m = 2\pi/T$, w dalszym ciągu mamy:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_x}{T} = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{x + \Delta x}{a_m} - \arcsin \frac{x}{a_m} \right)$$

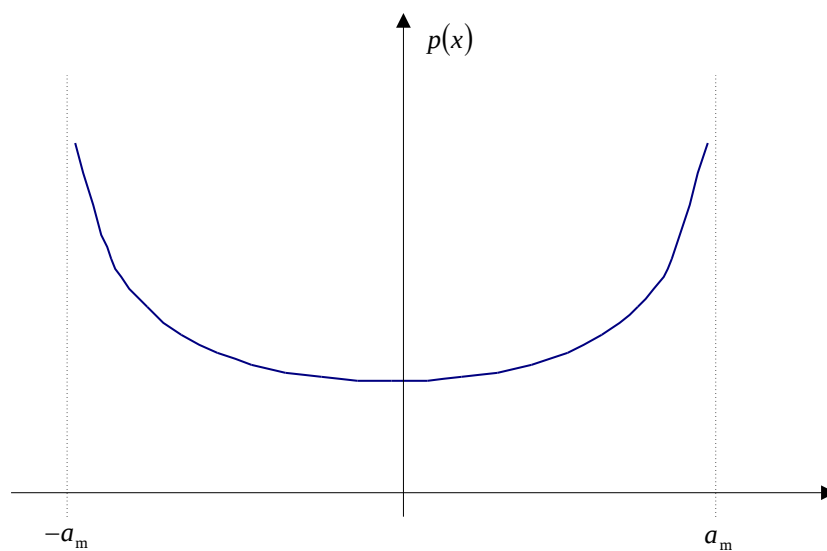
Tak więc funkcja gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\arcsin \frac{x + \Delta x}{a_m} - \arcsin \frac{x}{a_m} \right)$$

Otrzymane wyrażenie określa pierwszą pochodną funkcji $\arcsin x(t)$, a więc ostatecznie otrzymujemy:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{a_m^2 - x^2}} & |x| < a_m \\ 0 & |x| > a_m \end{cases}$$

Wyznaczona funkcja gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$ została przedstawiona na rysunku R.37.



Rysunek R.37

4.2. SZUMY W UKŁADACH MODULACJI CIĄGLYCH

Rozwiązanie 2.1

Przebieg czasowy sygnału zmodulowanego AM opisany jest zależnością:

$$\varphi_{AM}(t) = A_0[1 + kx(t)]\cos\omega_0 t$$

Po uwzględnieniu wpływu szumów przybiera on postać:

$$\varphi_{AM}(t) + n(t) = A_0[1 + kx(t)]\cos\omega_0 t + n_I(t)\cos\omega_0 t - n_Q(t)\sin\omega_0 t$$

Współczynnik sprawności energetycznej dla sygnału zmodulowanego AM wyrażony jest wzorem:

$$\mu_{AM} = \frac{k^2 \overline{x^2}}{1 + k^2 \overline{x^2}}$$

Aby wyznaczyć odniesiony zysk modulacyjny g_{AM} należy posłużyć się zależnością:

$$g_{AM} = \frac{\gamma_o}{\gamma_i K}$$

Należy zatem wyznaczyć odstęp-sygnał szum na wejściu detektora oraz na wyjściu całego systemu. Na wejście detektora podany jest sygnał zmodulowany AM, tak więc jego moc będzie równa:

$$P_i = P_{AM} = \frac{A_0^2}{2}(1 + k^2 \overline{x^2})$$

gdzie P_x jest mocą sygnału modulującego. Ponieważ $P_x = \overline{x^2}$, dlatego też można zapisać:

$$P_i = \frac{A_0^2}{2}(1 + k^2 \overline{x^2})$$

Moc szumu w paśmie W jest dana ogólną zależnością:

$$N = \frac{1}{\pi} \int_W S(\omega) d\omega$$

gdzie W jest pasmem analizowanego sygnału, a $S(\omega)$ widmową gęstością mocy szumu. Widmowa gęstość mocy addytywnego gaussowskiego szumu białego AWGN jest funkcją stałą o wartości η na wejściu do detektora oraz 2η na wyjściu układu (przy założeniu pracy w obszarze nadprogowym). Pasma sygnału AM równe jest $W_{AM} = 2\omega_{max}$, można zatem zapisać:

$$N_i = \frac{1}{\pi} \int_{W_{AM}} \eta d\omega = \frac{\eta W_{AM}}{\pi} = \frac{2\eta \omega_{max}}{\pi}$$

Sygnał na wyjściu układu, po uwzględnieniu szumu, opisany jest zależnością:

$$\psi_{AM}(t) \approx kA_0 x(t) + n_I(t)$$

Zatem moc wyjściowa:

$$P_o = k^2 A_0^2 \overline{x^2}$$

Z kolei moc szumu na wyjściu układu (należy pamiętać, że pasmo sygnału $x(t)$ ma szerokość ω_{max}) będzie opisana zależnością:

$$N_o = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{max}} 2\eta d\omega = \frac{2\eta \omega_{max}}{\pi}$$

Współczynnik poszerzenia pasma dla systemu AM wynosi:

$$\kappa = \frac{W_{AM}}{\omega_{max}} = 2$$

Podstawiamy wyznaczone wielkości do wzoru na odniesiony zysk modulacyjny:

$$g_{AM} = \frac{\gamma_o}{\gamma_i \kappa} = \frac{\frac{P_o}{N_o}}{\frac{P_i}{N_i} \kappa}$$

Ostatecznie uzyskujemy zależność opisującą odniesiony zysk modulacyjny dla systemu AM:

$$g_{AM} = \frac{k^2 \overline{x^2}}{1 + k^2 \overline{x^2}}$$

Na podstawie uzyskanej zależności wnioskujemy, że odniesiony zysk modulacyjny i sprawność energetyczna dla modulacji AM są sobie równe.

Maksymalny odniesiony zysk modulacyjny wyznaczmy dla tonowej modulacji AM.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń stwierdzamy, że:

$$g_{AM} = \mu_{AM} = \frac{m^2}{2 + m^2}$$

Maksymalny zysk modulacyjny, przy założeniu że nie będzie przemodulowania, zostanie osiągnięty dla współczynnika głębokości modulacji $m = 1$:

$$g_{AM} = \frac{1}{3} \approx -5 \text{ dB}$$

Rozwiązanie 2.2

Ad. a)

Moc sygnału nośnego w systemie AM wyznaczamy ze wzoru:

$$P_N = \frac{A_0^2}{2}$$

Odstęp sygnał-szum na wyjściu systemu AM wyraża się zależnością:

$$\gamma_o = \frac{P_o}{N_o} = \frac{k^2 A_0^2 \overline{x^2}}{N_o}$$

Dla modulacji tonowej, którą rozpatrujemy w zadaniu, odstęp sygnał-szum na wyjściu układu przyjmuje postać:

$$\gamma_o = \frac{\frac{m^2 A_0^2}{2}}{N_o} = \frac{m^2 P_N}{N_o}$$

Tak więc szukana wielkość opisana jest zależnością:

$$\gamma_N = \frac{P_N}{N_o} = \frac{\gamma_o}{m^2}$$

Wyściowy odstęp sygnał-szum $\gamma_o = 30 \text{ dB} = 10^3 \text{ W/W}$, $m = 0,8$, a więc:

$$\gamma_N = \frac{P_N}{N_o} = 1565,5 \approx 32 \text{ dB}$$

Ad. b)

Na podstawie rozwiązania zawartego w podpunkcie a) tego zadania wnioskujemy, że stosunek mocy sygnału nośnego do mocy szumu na wyjściu układu wyraża się wzorem:

$$\gamma_N = \frac{P_N}{N_o} = \frac{\gamma_o}{m^2}$$

Na podstawie rozwiązania zadania 2.1 stwierdzamy, że dla przypadku modulacji tonowej prawdziwa jest zależność:

$$g_{AM} = \frac{m^2}{2 + m^2} = \frac{\gamma_o}{\gamma_i \kappa}$$

Korzystając z powyższego wzoru wyznaczamy odstęp sygnał-szum na wyjściu układu:

$$\gamma_o = \frac{m^2 \kappa}{2 + m^2} \gamma_i$$

Po podstawieniu do wzoru na stosunek mocy sygnału nośnego do mocy szumów i jego uproszczeniu uzyskamy:

$$\gamma_N = \frac{\kappa}{2 + m^2} \gamma_i$$

Po uwzględnieniu wartości liczbowych (wartość progowa $\gamma_i = 10 \text{ dB} = 10$) wyznaczamy końcowy wynik:

$$\gamma_N = 7,58 \approx 8,8 \text{ dB}$$

Rozwiązanie 2.3

Wejściowy odstęp sygnał-szum dla systemu AM dany jest zależnością:

$$\gamma_i = \frac{P_{AM}}{N_i} = \frac{P_N + P_B}{N_i}$$

Moc szumu AWGN na wejściu do detektora wyznaczamy ze wzoru:

$$N_i = \frac{1}{\pi} \int_{W_{AM}} \eta d\omega = \frac{\eta W_{AM}}{\pi} = \frac{2\eta \omega_{\max}}{\pi} = 4\eta f_m$$

Zatem szukana wielkość przyjmuje postać:

$$\gamma_i = \frac{P_{AM}}{N_i} = \frac{P_N + P_B}{N_i} = \frac{P_N + P_B}{4\eta f_m}$$

Wstawiając dane zawarte w zadaniu otrzymujemy szukaną wartość:

$$\gamma_i = 5 \cdot 10^4 \approx 47 \text{ dB}$$

W celu wyznaczenia odniesionego zysku modulacyjnego skorzystamy z wyników obliczeń wykonanych w rozwiązaniu zadania 2.1. Możemy zatem zapisać następującą zależność:

$$g_{AM} = \frac{m^2}{2 + m^2}$$

Moc sygnału nośnego w systemie AM:

$$P_N = \frac{A_0^2}{2}$$

Z kolei moc wstęp bocznych:

$$P_B = \frac{m^2 A_0^2}{4} = \frac{m^2 P_N}{2}$$

Po przekształceniu powyższej zależności uzyskujemy:

$$m^2 = \frac{2P_B}{P_N}$$

Wstawiając dane otrzymujemy:

$$m^2 = \frac{1}{2}$$

Zatem odniesiony zysk modulacyjny wynosi:

$$g_{AM} = \frac{1}{5} \approx -7 \text{ dB}$$

Rozwiązanie 2.4

Odstęp sygnał-szum na wyjściu systemu AM wyraża się zależnością:

$$\gamma_o = \frac{P_o}{N_o} = \frac{k^2 A_0^2 \overline{x^2}}{N_o}$$

Dla modulacji tonowej, którą rozpatrujemy w zadaniu, odstęp sygnał-szum na wyjściu układu AM przyjmuje postać:

$$\gamma_o = \frac{m^2 A_0^2}{2N_o}$$

Moc szumu wyjściowego dla systemu AM wyznaczamy ze wzoru:

$$N_o = \frac{2\eta\omega_m}{\pi} = 4\eta f_m$$

dlatego też po uwzględnieniu powyższej zależności amplituda sygnału nośnego opisana jest zależnością :

$$A_0 = \sqrt{\frac{8\gamma_o \eta f_m}{m^2}}$$

Po wstawieniu do wyznaczonego wzoru danych liczbowych otrzymujemy szukaną wartość amplitudy wynoszącą:

$$A_0 = 0,5 \text{ V}$$

Rozwiązanie 2.5

W ogólnym przypadku współczynnik głębokości modulacji wyraża się wzorem $m = k|x|_{\max}$. Dla systemu AM prawdziwa jest zależność:

$$\gamma_o = \frac{P_o}{N_o} = \frac{k^2 A_0^2 \overline{x^2}}{N_o}$$

Ponieważ moc szumu na wyjściu układu AM :

$$N_o = 4\eta f_{\max}$$

dlatego też wzór pozwalający wyznaczyć amplitudę sygnału nośnego przyjmuje postać:

$$A_0 = \sqrt{\frac{4\eta\gamma_o f_{\max}}{k^2 \overline{x^2}}}$$

W powyższym wzorze nie znamy wartości średniokwadratowej sygnału modulującego $x(t)$ oraz stałej modulatora AM. Wartość średniokwadratową sygnału modulującego $x(t)$, która jest równocześnie mocą tego sygnału, wyznaczmy ze wzoru:

$$\overline{x^2} = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx$$

Po wyznaczeniu wartości całki otrzymujemy szukaną wartość równą:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{6}$$

Stałą modulatora AM wyznaczmy korzystając ze wzoru:

$$m = k|x|_{\max}$$

Ponieważ nasz sygnał przyjmuje wartości z przedziału $[-1; 1]$ V, zatem stała modulatora AM wynosi:

$$k = 1 \text{ 1/V}$$

Wstawiając wyznaczone wartości do wzoru na amplitudę sygnału nośnego oraz pamiętając o przeliczeniu odstępów sygnał-szum na skalę liniową ($\gamma_o = 40 \text{ dB} = 10^4$) obliczamy wartość szukanej amplitudy sygnału nośnego:

$$A_0 = 8\sqrt{15} \text{ mV}$$

Rozwiązanie 2.6

Amplitudę fali nośnej wyznaczmy korzystając ze wzoru na moc sygnału zmodulowanego AM:

$$P_{AM} = \frac{A_0^2}{2} (1 + k^2 \overline{x^2})$$

Wyjściowy odstęp sygnał szum dla systemu AM przyjmuje postać:

$$\gamma_o = \frac{P_o}{N_o} = \frac{k^2 A_0^2 \overline{x^2}}{N_o} = \frac{k^2 A_0^2 \overline{x^2}}{4\eta f_{\max}}$$

Dla modulacji AM prawdziwa jest zależność:

$$N_o = 4\eta f_{\max} = N_i$$

Uwzględniając wyprowadzone wyżej wzory można napisać, że:

$$k^2 \overline{x^2} = \frac{\gamma_o N_i}{A_0^2}$$

Wstawiając powyższą zależność do wzoru na moc sygnału AM otrzymujemy:

$$P_{AM} = \frac{A_0^2}{2} \left(1 + \frac{\gamma_o N_i}{A_0^2} \right)$$

Po przekształceniu dostajemy zależność:

$$A_0 = \sqrt{2P_{AM} - \gamma_o N_i}$$

Wstawiając dane z zadania wyznaczamy szukaną amplitudę fali nośnej, która wynosi:

$$A_0 = \sqrt{19} \text{ V}$$

Rozwiązanie 2.7

Prawdopodobieństwo $\Pr\{r(t) \geq A_0\}$ przekroczenia przez obwiednię szumu poziomu amplitudy fali nośnej jest dane zależnością:

$$\Pr\{r(t) \geq A_0\} = \int_{A_0}^{\infty} f(r) dr \leq 0,01$$

Korzystając z podanej w zadaniu wskazówki rozwiązujemy powyższą całkę, otrzymując zależność:

$$\Pr\{r(t) \geq A_0\} = \exp\left(-\frac{A_0^2}{2\sigma_N^2}\right)$$

W zadaniu należy wyznaczyć stosunek mocy sygnału nośnego do mocy szumu w paśmie sygnału informacyjnego γ . Można więc zapisać, że:

$$\gamma = \frac{P_N}{N_x} = \frac{A_0^2}{2N_x}$$

gdzie N_x oznacza moc szumu w paśmie sygnału modulującego. Moc szumu w paśmie sygnału modulującego jest dwa razy mniejsza od mocy szumu w paśmie sygnału zmodulowanego AM, ponieważ modulacja AM powoduje dwukrotne zwiększenie pasma sygnału. Dlatego też prawdziwa jest zależność:

$$\sigma_N^2 = N_i = 2N_x$$

Ostatecznie:

$$\Pr\{r(t) \geq A_0\} = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$$

Rozwiązaniem nierówności:

$$\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \leq 0,01$$

jest odstęp nośna-szum:

$$\gamma \geq 2 \ln \frac{1}{0,01} \approx 9,21 \approx 9,64 \text{ dB}$$

Rozwiązanie 2.8

W ogólnym przypadku odstęp sygnał-szum na wyjściu odbiornika AM przybiera postać:

$$\gamma_{\text{oAM}} = \frac{k^2 A_0^2 \overline{x^2}}{4\eta f_{\text{max}}}$$

Moc sygnału harmonicznego wyraża się wzorem:

$$\overline{x^2} = \frac{a_m^2}{2}$$

i wtedy ($m = ka_m$):

$$\gamma_{\text{oAM}} = \frac{k^2 a_m^2 A_0^2}{8\eta f_m} = \frac{m^2 A_0^2}{8\eta f_m}$$

Postać czasowa zaszumionego sygnału na wyjściu systemu DSB-SC (detekcja koherentna) jest opisana zależnością:

$$\psi_{\text{oDSB-SC}}(t) = \frac{1}{2} k A_0 x(t) + \frac{1}{2} n_1(t)$$

Moc sygnału wyjściowego odbiornika DSB-SC wynosi:

$$P_o = \frac{1}{4} k^2 A_0^2 \overline{x^2}$$

Dla modulacji tonowej mamy:

$$P_o = \frac{m^2 A_0^2}{8}$$

Moc szumu na wyjściu układu detektora DSB-SC opisana jest zależnością:

$$N_o = \frac{1}{4} \overline{n_1^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\eta\omega_m}{\pi} = \eta f_m$$

Tak więc wyjściowy odstęp sygnał-szum dla systemu DSB-SC opisany jest zależnością:

$$\gamma_{\text{oDSB-SC}} = \frac{m^2 A_0^2}{8\eta f_m}$$

Porównując wyznaczone zależności stwierdzamy, że:

$$\gamma_{\text{oAM}} = \gamma_{\text{oDSB-SC}}$$

Rozwiązanie 2.9

Postać czasowa szumu wyjściowego odbiornika DSB-SC z detekcją koherentną przyjmuje postać:

$$n_o(t) = \frac{1}{2} n_1(t)$$

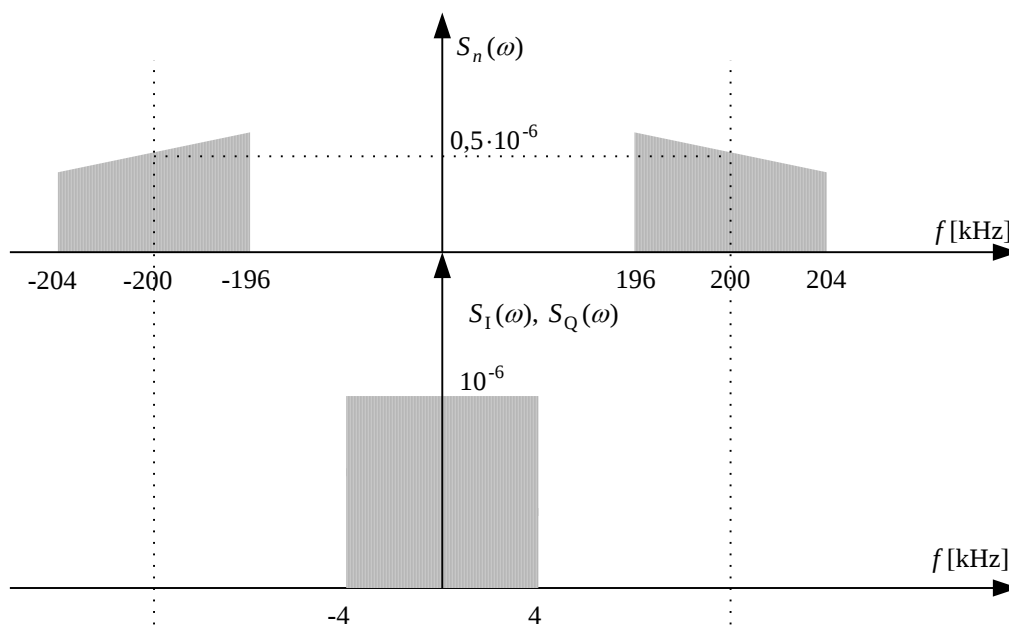
Moc szumu na wyjściu odbiornika DSB-SC:

$$N_o = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\omega_{\max}} S_1(\omega) d\omega$$

Składowa synfazowa oraz kwadraturowa szumu wąskopasmowego jest dana zależnością:

$$S_1(\omega) = S_Q(\omega) = \begin{cases} S_n(\omega + \omega_0) + S_n(\omega - \omega_0) & |\omega| < \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

Graficzne wyznaczenie poszukiwanej wartości składowej synfazowej przedstawiono na rysunku R.38.



Rysunek R.38

Z rysunku odczytujemy wartość składowej synfazowej szumu wąskopasmowego:

$$S_I(\omega) = 10^{-6} \text{ W/Hz}$$

Zatem po wstawieniu wartości liczbowych moc szumu na wyjściu układu wynosi:

$$N_o = 2 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

Moc wyjściowa sygnału zmodulowanego DSB-SC opisana jest zależnością:

$$P_o = \frac{1}{4} k^2 A_0^2 \overline{x^2}$$

Postać czasowa sygnału zmodulowanego DSB-SC dana jest wzorem:

$$\varphi_{\text{DSB-SC}}(t) = k A_0 x(t) \cos \omega_0 t$$

zatem jego moc można wyznaczyć z zależności:

$$P_{\text{DSB-SC}} = k^2 A_0^2 \overline{x^2}$$

Po uwzględnieniu powyższych uwag, wzór pozwalający wyznaczyć moc wyjściową sygnału zmodulowanego DSB-SC przyjmuje postać:

$$P_o = \frac{P_{\text{DSB-SC}}}{4}$$

Wstawiając wartości liczbowe otrzymujemy moc sygnału wyjściowego równą:

$$P_o = 2,5 \text{ W}$$

Tak więc odstęp sygnał-szum na wyjściu układu wynosi:

$$\gamma_o = 1250 \approx 30,1 \text{ dB}$$

Rozwiązanie 2.10

Ad a)

Wyjściowy odstęp sygnał-szum w systemie PM wyraża się zależnością:

$$\gamma_o = \frac{P_o}{N_o} = \frac{\pi k_{\text{PM}}^2 A_0^2 P_x}{2 \eta \omega_m}$$

Uwzględniając, że moc harmonicznego sygnału modulującego wyraża się wzorem:

$$P_x = \frac{a_m^2}{2}$$

dewiacja fazy w systemie PM opisana jest zależnością:

$$\Delta\Theta_{PM} = k_{PM} a_m$$

natomiast moc sygnału zmodulowanego PM wyrażona jest wzorem

$$P_{PM} = \frac{A_0^2}{2}$$

wyjściowy odstęp sygnał-szum w systemie PM dla tonowej modulacji przybiera postać:

$$\gamma_o = \frac{\Delta^2 \Theta_{PM} P_{PM}}{2N_x}$$

W tonowej modulacji PM odniesiony zysk modulacyjny wyraża się wzorem:

$$g_{PM} = \frac{1}{2} \Delta^2 \Theta_{PM}$$

zatem dewiacja fazy sygnału zmodulowanego PM (dla $g_{PM} = 3 \text{ dB} \approx 2$):

$$\Delta\Theta_{PM} = 2 \text{ rad}$$

Po podstawieniu do wyznaczonego wcześniej wzoru otrzymujemy wyjściowy odstęp sygnał-szum równy:

$$\gamma_o = 100 = 20 \text{ dB}$$

Ad b)

Wzór na zysk modulacyjny w tonowym systemie PM wyznaczmy korzystając ze wzoru:

$$G_{PM} = g_{PM} \kappa$$

gdzie współczynnik poszerzenia pasma opisany jest zależnością:

$$\kappa = \frac{W_{PM}}{\omega_m} = 2(\Delta\Theta_{PM} + 1)$$

Uwzględniając, że w tonowej modulacji PM odniesiony zysk modulacyjny wyraża się wzorem:

$$g_{PM} = \frac{1}{2} \Delta^2 \Theta_{PM}$$

zależność pozwalająca wyznaczyć zysk modulacyjny przybiera postać:

$$G_{PM} = \Delta^2 \Theta_{PM} (\Delta\Theta_{PM} + 1)$$

Po podstawieniu wyznaczonej w podpunkcie a) dewiacji fazy otrzymujemy szukaną wartość:

$$G_{FM} = 12 \approx 10,8 \text{ dB}$$

Rozwiązanie 2.11

W ogólnym przypadku odniesiony zysk modulacyjny wyraża się wzorem:

$$g = \frac{\gamma_o}{\gamma_i \kappa}$$

co można zapisać jako:

$$g = \frac{\gamma_o}{\frac{P_i}{N_i} \kappa}$$

gdzie P_i i N_i jest odpowiednio mocą sygnału i szumu na wejściu detektora, a κ współczynnikiem poszerzenia pasma.

Moc sygnału wejściowego detektora jest równa mocy sygnału zmodulowanego FM, czyli:

$$P_i = P_{FM} = \frac{A_0^2}{2}$$

Moc szumu na wejściu detektora:

$$N_i = \frac{\eta W_{FM}}{\pi}$$

gdzie W_{FM} [rad/s] jest szerokością pasma sygnału zmodulowanego FM, natomiast współczynnik poszerzenia pasma:

$$\kappa = \frac{W_{FM}}{\omega_{max}}$$

Po podstawieniu powyższych zależności do wzoru na odniesiony zysk modulacyjny dla systemu FM otrzymamy następujący wzór:

$$g_{FM} = \frac{2\eta\omega_{max}\gamma_o}{\pi A_0^2} = \frac{4\eta f_{max}\gamma_o}{A_0^2}$$

Po podstawieniu danych liczbowych wyznaczamy wartość odniesionego zysku modulacyjnego, który wynosi:

$$g_{FM} = 800 \approx 29 \text{ dB}$$

W celu wyznaczenia pasma sygnału zmodulowanego FM skorzystamy z reguły Carsona:

$$B_{FM} = 2(\Delta\Theta_{FM} + 1)f_{max}$$

Dewiację fazy dla systemu FM obliczamy jako:

$$\Delta\Theta_{FM} = \frac{k_{FM}|x|_{max}}{\omega_{max}}$$

Nieznana stałą modulatora k_{FM} wyznaczamy korzystając ze wzoru na odstęp sygnał-szum na wyjściu układu:

$$\gamma_o = \frac{P_o}{N_o} = \frac{3\pi k_{FM}^2 A_0^2 P_x}{2\eta\omega_{max}^3}$$

Po przekształceniach otrzymujemy zależność:

$$k_{FM} = \sqrt{\frac{2\gamma_o\eta\omega_{max}^3}{3\pi A_0^2 P_x}} = 8\pi \cdot 10^4 \text{ rad/Vs}$$

Podstawiając wyznaczoną wartość stałej k_{FM} do wzoru na dewiację fazy sygnału zmodulowanego FM otrzymujemy jej wartość równą:

$$\Delta\Theta_{FM} = 20 \text{ rad}$$

Wymagana szerokość pasma sygnału zmodulowanego wynosi zatem:

$$B_{FM} = 168 \text{ kHz}$$

Rozwiązanie 2.12

Wejściowy odstęp sygnał-szum definiowany jest zależnością:

$$\gamma_i = \frac{P_i}{N_i} = \frac{P_{FM}}{N_i}$$

a zatem:

$$N_i = \frac{P_{FM}}{\gamma_i}$$

Moc sygnału zmodulowanego FM wyznaczana jest ze wzoru:

$$P_{FM} = \frac{A_0^2}{2}$$

zatem po podstawieniu tej wielkości do wzoru na moc szumu wejściowego detektora uzyskujemy zależność:

$$N_i = \frac{A_0^2}{2\gamma_i}$$

Po uwzględnieniu założenia, że system ma pracować tuż nad progiem, czyli dla wejściowego odstępu sygnał-szum $\gamma_i = 10 \text{ dB} = 10 \text{ W/W}$, otrzymujemy moc szumu na wejściu detektora równą:

$$N_i = 20 \text{ W}$$

Z drugiej strony, moc szumu na wejściu detektora wynosi:

$$N_i = \frac{\eta W_{FM}}{\pi}$$

gdzie zgodnie z założeniem:

$$W_{FM} = W_{WBFM} = 2\Delta\omega_{FM}$$

Łącząc ostatnie zależności otrzymujemy:

$$N_i = \frac{2\eta\Delta\omega_{FM}}{\pi} = 4\eta\Delta f_{FM}$$

wobec czego dewiacja częstotliwości

$$\Delta f_{FM} = \frac{N_i}{4\eta}$$

Po podstawieniu danych liczbowych wyznaczamy poszukiwaną dewiację częstotliwości:

$$\Delta f_{FM} = 10 \text{ kHz}$$

W ogólnym przypadku wyjściowy odstęp sygnał-szum w systemie FM opisany jest zależnością:

$$\gamma_o = \frac{3\pi k_{FM}^2 A_0^2 P_x}{2\eta\omega_{\max}^3}$$

Ponieważ sygnał modulujący jest sygnałem sinusoidalnym, dlatego jego moc:

$$P_x = \frac{a_m^2}{2}$$

Dla modulacji FM obowiązuje zależność:

$$\Delta\omega_{FM} = k_{FM} a_m$$

Wyjściowy odstęp sygnał-szum wynosi zatem:

$$\gamma_o = \frac{3\pi\Delta^2\omega_{FM} A_0^2}{2\eta\omega_{\max}^3}$$

lub:

$$\gamma_o = \frac{3\Delta^2 f_{\text{FM}} A_0^2}{4\eta f_{\text{max}}^3}$$

Należy jeszcze wyznaczyć częstotliwość sygnału modulującego, korzystając ze wzoru na moc szumu w jego paśmie:

$$N_x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{\text{max}}} \eta d\omega = 2\eta f_{\text{max}}$$

Zatem częstotliwość maksymalna sygnału modulującego wynosi:

$$f_{\text{max}} = 500 \text{ Hz}$$

Wyjściowy odstęp sygnał-szum wynosi:

$$\gamma_o \approx 53,8 \text{ dB}$$

Rozwiązanie 2.13

W zadaniu rozpatrujemy odbiornik FM z kompresją pasma. Odstęp sygnał-szum w przypadku stosowania układu z kompresją pasma można wyznaczyć z zależności (dla maksymalnej możliwej kompresji):

$$\gamma_i' = \Delta\Theta_{\text{FM}} \frac{P_i}{N_i}$$

gdzie $\Delta\Theta_{\text{FM}}$ jest dewiacją fazy sygnału zmodulowanego FM, a P_i'/N_i odstępem sygnał-szum na wejściu wewnętrznego filtra przeddetekcyjnego. Odstęp sygnał-szum w ogólnym przypadku (a więc również w przypadku sygnału FM) definiowany jest jako:

$$\gamma_i = \frac{P_i}{N_i}$$

Treść zadania narzuca równość tych wielkości, a to jest możliwe jedynie przy równoczesnej zmianie amplitudy sygnału nośnego, a więc również jego mocy. Możemy zatem zapisać następujące równanie:

$$\gamma_i = \frac{P_i}{N_i} = \Delta\Theta_{\text{FM}} \frac{P_i'}{N_i} = \gamma_i'$$

Po uproszczeniu powyższego wyrażenia otrzymujemy:

$$P_i = \Delta\Theta_{\text{FM}} P_i'$$

Moc sygnał FM:

$$P_i = P_{\text{FM}} = \frac{A_0^2}{2}$$

Wyznaczamy amplitudę sygnału nośnego dla układu z kompresją pasma:

$$A_0' = \frac{A_0}{\sqrt{\Delta\Theta_{\text{FM}}}}$$

Dewiację fazy sygnału wyznaczmy zgodnie z regułą Carsona:

$$B_{\text{FM}} = 2\Delta\Theta_{\text{FM}} f_{\text{max}}$$

W przypadku układu z kompresją pasma najmniejsza dopuszczalna szerokość pasma wewnętrznego filtra przeddetekcyjnego wynosi:

$$B_F = 2f_{\text{max}}$$

a zatem dewiacja fazy sygnału:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = \frac{B_{\text{FM}}}{B_{\text{F}}} = 20$$

co w efekcie pozwala wyznaczyć szukaną zmianę amplitudy:

$$\Delta A_0 = A_0 - A_0' = A_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\Delta\Theta_{\text{FM}}}} \right) = 15,53 \text{ V}$$

Rozwiązanie 2.14

Ad. a)

W tonowej modulacji FM odniesiony zysk modulacyjny wyraża się wzorem:

$$g_{\text{FM}} = \frac{3}{2} \Delta^2 \Theta_{\text{FM}}$$

W celu wyliczenia szukanej wielkości konieczne jest zatem wyznaczenie wartości dewiacji fazy sygnału zmodulowanego FM. Sygnał wyjściowy wąskopasmowego modulatora PM, który w modulacji pośredniej jest sygnałem FM, podawany jest na wejście powielacza częstotliwości, zatem słuszna jest zależność:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = n \Delta\Theta_{\text{NBFM}}$$

Po uwzględnieniu zależności $\Delta\Theta_{\text{NBFM}} = \Delta\omega_{\text{NBFM}} / \omega_{\text{m}}$ otrzymujemy zależność:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = n \frac{\Delta\omega_{\text{NBFM}}}{\omega_{\text{m}}}$$

Szerokość pasma sygnału modulującego obliczymy ze wzoru na moc szumu zawartą w jego paśmie:

$$N_x = \frac{\eta \omega_{\text{m}}}{\pi} = 2\eta f_{\text{m}}$$

Ponieważ składowa synfazowa widmowej gęstości mocy szumu AWGN jest równa:

$$S_1(\omega) = 2\eta$$

zatem częstotliwość sygnału modulującego można wyznaczyć z zależności:

$$f_{\text{m}} = \frac{N_x}{S_1(\omega)}$$

Po podstawieniu do wzoru wartości liczbowych otrzymujemy:

$$f_{\text{m}} = 4 \text{ kHz}$$

Dewiacja fazy sygnału zmodulowanego FM na wyjściu powielacza wynosi:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = 100 \text{ rad}$$

Szukana wartość odniesionego zysku modulacyjnego wynosi zatem:

$$g_{\text{FM}} = 15 \cdot 10^3 \approx 41,76 \text{ dB}$$

Ad. b)

Wzór na zysk modulacyjny w systemie FM przybiera postać:

$$G_{\text{FM}} = g_{\text{FM}} \kappa$$

gdzie współczynnik poszerzenia pasma opisany jest zależnością:

$$\kappa = \frac{W_{\text{FM}}}{\omega_{\text{m}}}$$

Ponieważ mamy do czynienia z sygnałem szerokopasmowym, zatem słuszna jest zależność:

$$W_{\text{FM}} = 2\Delta\Theta_{\text{FM}}\omega_m$$

Współczynnik poszerzenia pasma dla rozpatrywanego sygnału FM:

$$\kappa = 2\Delta\Theta_{\text{FM}} = 200$$

Po podstawieniu tego wyniku do wzoru na zysk modulacyjny G_{FM} otrzymujemy szukaną wartość:

$$G_{\text{FM}} = 3 \cdot 10^6 \approx 64,77 \text{ dB}$$

Ad. c)

Częstotliwość środkowa filtra przeddetekcyjnego powinna być równa częstotliwości nośnej systemu FM. Ponieważ powielacz częstotliwości zwiększa również n -krotnie częstotliwość nośną w sygnale wyjściowym wąskopasmowego modulatora fazy, słuszną jest zatem zależność:

$$f_{\text{OFM}} = n f_{\text{ONBPM}}$$

Z danych zamieszczonych w zadaniu wynika, że częstotliwość nośna wąskopasmowego modulatora fazy jest b razy większa od częstotliwości sygnału modulującego:

$$f_{\text{ONBPM}} = b f_m$$

Zatem częstotliwość nośna sygnału wyjściowego powielacza stanowiącego sygnał zmodulowany FM wynosi:

$$f_{\text{OFM}} = b n f_m = 40 \text{ MHz}$$

Szerokość pasma filtra przeddetekcyjnego powinna być równa szerokości pasma sygnału, więc:

$$B_{\text{FM}} = 2\Delta\Theta_{\text{FM}} f_m = 0,8 \text{ MHz}$$

Rozwiązanie 2.15

Ogólny wzór pozwalający wyznaczyć szerokość pasma sygnału zmodulowanego FM (reguła Carsona) jest postaci:

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_{\text{max}}$$

Zatem w celu obliczenia szerokości pasma należy wyznaczyć dewiację fazy. Przypomnijmy ogólny wzór na dewiację fazy sygnału zmodulowanego FM:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = \frac{k_{\text{FM}} |x|_{\text{max}}}{\omega_{\text{max}}}$$

Konieczne jest zatem wyznaczenie stałej modulatora FM, gdyż pozostałe parametry występujące we wzorze są dane w zadaniu. Wielkość ta zawarta jest we wzorze na moc szumu wyjściowego układu FM:

$$N_o = \frac{1}{\pi k_{\text{FM}}^2 A_0^2} \int_0^{\omega_{\text{max}}} 2\omega^2 \eta d\omega = \frac{2\eta \omega_{\text{max}}^3}{3\pi k_{\text{FM}}^2 A_0^2}$$

W celu wyznaczenia zysku modulacyjnego należy dodatkowo wyznaczyć moce wejściowe sygnału i szumu oraz współczynnik poszerzenia pasma. Moc szumu wejściowego w systemie FM opisana jest zależnością:

$$N_i = \frac{\eta W_{\text{FM}}}{\pi}$$

natomiast moc sygnału wejściowego jest mocą sygnału zmodulowanego FM:

$$P_i = P_{FM} = \frac{A_0^2}{2}$$

Zgodnie z definicją współczynnik poszerzenia pasma:

$$\kappa_{FM} = \frac{W_{FM}}{\omega_{max}}$$

Ponieważ postać czasowa sygnału wyjściowego detektora FM opisana jest zależnością:

$$\psi_{FM}(t) \approx x(t) + \frac{\dot{n}_Q(t)}{k_{FM} A_0}$$

zatem moc sygnału na wyjściu detektora:

$$P_o = \overline{x^2}$$

jest równa mocy sygnału modulującego, która jest wielkością znaną w zadaniu:

$$P_o = P_x$$

Odniesiony zysk modulacyjny przyjmuje postać:

$$g_{FM} = \frac{\gamma_o}{\gamma_i \kappa_{FM}} = \frac{\frac{P_o}{N_o}}{\frac{P_i}{N_i} \cdot \frac{W_{FM}}{\omega_{max}}}$$

Po podstawieniu do powyższego wzoru wcześniej wyznaczonych zależności oraz jego uproszczeniu otrzymamy:

$$g_{FM} = \frac{3k_{FM}^2 P_x}{\omega_{max}^2}$$

Zauważmy, że czynnik k_{FM}/ω_{max} można wyliczyć korzystając ze wzoru na dewiację fazy sygnału FM:

$$\frac{k_{FM}}{\omega_{max}} = \frac{\Delta\Theta_{FM}}{|x|_{max}}$$

Wobec tego dewiacja fazy sygnału zmodulowanego FM określona jest zależnością:

$$\Delta\Theta_{FM} = \sqrt{\frac{g_{FM} |x|_{max}^2}{3P_x}}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$\Delta\Theta_{FM} = 8 \text{ rad}$$

Zatem szukana szerokość pasma sygnału zmodulowanego FM wynosi:

$$B_{FM} = 90 \text{ kHz}$$

Rozwiązanie 2.16

Odniesiony zysk modulacyjny dla modulacji AM opisany jest zależnością:

$$g_{AM} = \frac{m^2}{2 + m^2}$$

i nie zależy od szerokości pasma sygnału zmodulowanego. Maksymalna wartość odniesionego zysku modulacyjnego osiągnięta jest dla $m=1$ i wynosi:

$$g_{AM}^* = \frac{1}{3} \approx -5 \text{ dB}$$

Obliczymy teraz odniesiony zysk modulacyjny dla systemu FM przy maksymalnym wykorzystaniu dostępnego pasma. Zgodnie z regułą Carsona można zapisać:

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_m$$

Dla danych zawartych w zadaniu mamy:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}}^* = \frac{B_{\text{FM}}^*}{2f_m} - 1 = 9 \text{ rad}$$

Dla modulacji tonowej FM prawdziwa jest zależność:

$$g_{\text{FM}} = \frac{3}{2} \Delta^2 \Theta_{\text{FM}}$$

zatem odniesiony zysk modulacyjny dla systemu FM wynosi:

$$g_{\text{FM}} = \frac{243}{2} \approx 20,8 \text{ dB}$$

Z porównania wyznaczonych wielkości wynika, że w przypadku modulacji FM odniesiony zysk modulacyjny jest znacznie większy w porównaniu z odniesionym zyskiem modulacyjnym dla modulacji AM; w przypadku systemu AM można nawet mówić o „stracie” modulacyjnej.

Rozwiązanie 2.17

Zakładamy, że zależność pozwalająca wyznaczyć moc odbieraną $P(r)$ w funkcji odległości r od nadajnika emitującego sygnał o mocy P dana jest zależnością:

$$P(r) = \frac{P}{br^2}$$

Zatem moc sygnału na wyjściu systemu AM w odległości $r_1 = 3 \text{ km}$ od nadajnika przyjmuje postać:

$$P_o(r_1) = \frac{m^2 A_{0\text{AM}}^2}{2br_1^2}$$

Zapiszmy więc wzór na wyjściowy odstęp sygnał szum dla modulacji AM, już z uwzględnieniem wpływu odległości na spadek mocy:

$$\gamma_{\text{oAM}} = \frac{P_o(r_1)}{N_o} = \frac{\frac{m^2 A_{0\text{AM}}^2}{2br_1^2}}{4\eta f_m} = \frac{m^2 A_{0\text{AM}}^2}{8\eta f_m br_1^2}$$

Z kolei dla systemu FM moc sygnału na wyjściu odbiornika w odległości r_2 od nadajnika przyjmuje postać:

$$P_o(r_2) = \frac{\overline{x^2}}{br_2^2} = \frac{a_m^2}{2br_2^2}$$

zatem wyjściowy odstęp sygnał-szum dla modulacji FM

$$\gamma_{\text{oFM}} = \frac{3\Delta^2 \Theta_{\text{FM}} A_{0\text{FM}}^2}{8\eta f_m br_2^2}$$

Ponieważ wyjściowe odstępów sygnał-szum zgodnie z założeniem są równe, zatem:

$$\frac{m^2 A_{0\text{AM}}^2}{r_1^2} = \frac{3\Delta^2 \Theta_{\text{FM}} A_{0\text{FM}}^2}{r_2^2}$$

Czyli:

$$r_2^2 = \frac{3\Delta^2\Theta_{\text{FM}}A_{\text{0FM}}^2r_1^2}{m^2A_{\text{0AM}}^2}$$

Wiemy ponadto, że moce sygnałów zmodulowanych AM i FM również są sobie równe, czyli:

$$\frac{A_{\text{0FM}}^2}{2} = \frac{A_{\text{0AM}}^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)$$

Po uwzględnieniu tej zależności otrzymujemy następujący wzór:

$$r_2^2 = \frac{3\Delta^2\Theta_{\text{FM}}\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)r_1^2}{m^2}$$

Wiedząc, że dewiacja fazy:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = \frac{\Delta f_{\text{FM}}}{f_{\text{m}}}$$

możemy obliczyć teoretyczną odległość odbiornika od nadajnika dla systemu FM:

$$r_2 = \sqrt{3\left(1 + \frac{m^2}{2}\right)} \frac{\Delta f_{\text{FM}} r_1}{m f_{\text{m}}}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymujemy szukaną odległość, równą:

$$r_2 \approx 48,5 \text{ km}$$

Rozwiązanie 2.18

Dla modulacji tonowej odstęp sygnał-szum na wyjściu systemu AM opisany jest zależnością:

$$\gamma_{\text{oAM}} = \frac{m^2 A_{\text{0AM}}^2 \pi}{4\eta\omega_{\text{m}}}$$

natomiast na wyjściu systemu FM przyjmuje postać:

$$\gamma_{\text{oFM}} = \frac{3\pi A_{\text{0FM}}^2 \Delta^2 \Theta_{\text{FM}}}{4\eta\omega_{\text{m}}}$$

Ponieważ z treści zadania wynika, że wyjściowe odstęp sygnał-szum są równe dla analizowanych systemów, zatem porównując powyższe wzory otrzymujemy:

$$\gamma_{\text{oFM}} = \frac{3\pi A_{\text{0FM}}^2 \Delta^2 \Theta_{\text{FM}}}{4\eta\omega_{\text{m}}} = \frac{m^2 A_{\text{0AM}}^2 \pi}{4\eta\omega_{\text{m}}} = \gamma_{\text{oAM}}$$

Należy wyznaczyć stosunek mocy sygnałów FM i AM, zatem:

$$\gamma = \frac{P_{\text{FM}}}{P_{\text{AM}}} = \frac{3\Delta^2\Theta_{\text{FM}}}{m^2}$$

Z postaci czasowej sygnału zmodulowanego FM odczytujemy wartość dewiacji fazy $\Delta\Theta_{\text{FM}} = 4 \text{ rad}$, co w efekcie umożliwia nam wyznaczenie poszukiwanej wartości:

$$\gamma \approx 24,77 \text{ dB}$$

Rozwiązanie 2.19

Współczynnik redukcji szumów ρ zdefiniowany jest jako stosunek mocy szumów na wyjściu układu bez zastosowanej preemfazy/deemfazy N_o do mocy szumu na wyjściu w układzie z preemfazą/deemfazą N'_o :

$$\rho_{AM} = \frac{N_o}{N'_o}$$

W przypadku odbiornika AM bez filtra deemfazy widmowa gęstość mocy szumu wyjściowego wynosi $S(\omega) = 2\eta$, a zatem moc szumu wyjściowego jest równa:

$$N_o = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{\max}} S_1(\omega) d\omega = \frac{2\eta\omega_{\max}}{\pi}$$

Po wprowadzeniu filtra deemfazy widmowa gęstość mocy szumu wyjściowego wynosi:

$$S'(\omega) = |H(\omega)|^2 S(\omega) = |H(\omega)|^2 2\eta$$

gdzie $|H(\omega)|$ jest charakterystyką amplitudowo-częstotliwościową zastosowanego filtra deemfazy:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_D)^2}$$
$$\omega_D = \frac{1}{RC}$$

Częstość ω_D jest częstością graniczną, powyżej której filtr deemfazy tłumi sygnał wejściowy. Dla analizowanego przypadku widmowa gęstość mocy sygnału na wyjściu filtra deemfazy przyjmie postać:

$$S'(\omega) = S(\omega)|H(\omega)|^2 = \frac{2\eta}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^2}$$

Ponieważ:

$$N'_o = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{\max}} S'(\omega) d\omega = \frac{2\eta}{\pi} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{d\omega}{1 + (\omega/\omega_D)^2}$$

to po wyznaczeniu wartości całki otrzymujemy:

$$N'_o = \frac{2\eta\omega_D}{\pi} \arctan\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_D}\right)$$

Porównując wyznaczone moce szumu otrzymujemy szukaną wielkość :

$$\rho_{AM} = \frac{N_o}{N'_o} = \frac{\omega_{\max}}{\omega_D \arctan\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_D}\right)}$$

Rozwiązanie 2.20

Postać czasowa sygnału na wyjściu systemu PM opisana jest zależnością:

$$\psi_{PM}(t) \approx x(t) + \frac{n_Q(t)}{k_{PM}A_0}$$

zatem wyjściowa moc szumu wynosi:

$$N_o = \overline{n_o^2} = \frac{1}{\pi k_{PM}^2 A_0^2} \int_0^{\omega_{max}} S_Q(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi k_{PM}^2 A_0^2} \int_0^{\omega_{max}} 2\eta d\omega = \frac{2\eta\omega_{max}}{\pi k_{PM}^2 A_0^2}$$

W przypadku zastosowania układu z preemfazą/deemfazą moc szumu na wyjściu układu PM przybierze postać:

$$N_o' = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_{max}} S'(\omega) d\omega$$

gdzie:

$$S'(\omega) = S_Q(\omega) |H_D(\omega)|^2 = \frac{2\eta}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^2}$$

Wstawiając wyznaczone zależności do wzoru na moc szumu na wyjściu układu z filtrami preemfazy/deemfazy otrzymujemy:

$$N_o' = \frac{2\eta\omega_D}{\pi} \arctan\left(\frac{\omega_{max}}{\omega_D}\right)$$

Porównując wyznaczone moce szumu otrzymujemy szukaną wielkość:

$$\rho_{PM} = \frac{\frac{\omega_{max}}{\omega_D}}{\arctan\left(\frac{\omega_{max}}{\omega_D}\right)}$$

Współczynniki redukcji szumów dla systemu PM oraz systemu AM przyjmują jednakową wartość.

Rozwiązanie 2.21

Postać czasowa sygnału na wyjściu systemu FM opisana jest wzorem:

$$\psi_{FM}(t) \approx x(t) + \frac{\dot{n}_Q(t)}{k_{FM}A_0}$$

zatem moc szumu na wyjściu układu FM wynosi:

$$N_o = \frac{2\eta\omega_{max}^3}{3\pi k_{FM}^2 A_0^2}$$

Po zastosowaniu filtra deemfazy moc szumu na wyjściu układu FM będzie wyrażona wzorem:

$$N_o' = \frac{1}{\pi k_{FM}^2 A_0^2} \int_0^{\omega_{max}} S'(\omega) d\omega$$

Widmowa gęstość mocy szumu na wyjściu filtra deemfazy dana jest wzorem:

$$S_D(\omega) = S_Q(\omega) |H_D(\omega)|^2 = \frac{2\eta\omega^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^2}$$

gdzie ω_D jest wielkością zależną od parametrów R i C filtru:

$$\omega_D = \frac{1}{RC}$$

Wyrażenie określające moc szumu wyjściowego w układzie z filtrem deemfazy przyjmuje postać:

$$N_o' = \frac{1}{\pi k_{FM}^2 A_0^2} \int_0^{\omega_{\max}} \frac{2\eta\omega^2}{1 + (\omega/\omega_D)^2} d\omega$$

Ponieważ cała nieoznaczona:

$$\int \frac{x^2}{1 + (x/a)^2} dx = a^3 \left(\frac{x}{a} - \arctan \frac{x}{a} \right)$$

to moc szumu wyjściowego:

$$N_o' = \frac{2\eta}{\pi k_{FM}^2 A_0^2} \omega_D^3 \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_D} - \arctan \frac{\omega_{\max}}{\omega_D} \right)$$

Poszukiwany współczynnik redukcji szumów przyjmuje postać :

$$\rho_{FM} = \frac{\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_D} \right)^3}{3 \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_D} - \arctan \frac{\omega_{\max}}{\omega_D} \right)}$$

Rozwiązanie 2.22

Należy zauważyć, że moc sygnału na wyjściu odbiornika bez zastosowania filtrów preemfazy/deemfazy, jak również w przypadku ich zastosowania, będzie taka sama, dlatego też różnica między odstępem sygnał-szum na wyjściu w obu wspomnianych przypadkach będzie spowodowana jedynie różnicą mocy szumu na wyjściu, równą współczynnikowi redukcji szumów ρ . Z rozwiązania zadania 2.20 wynika, że współczynnik redukcji szumów dla systemu PM opisany jest zależnością:

$$\rho_{PM} = \frac{\frac{\omega_{\max}}{\omega_D}}{\arctan \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_D} \right)}$$

Wyznaczamy częstość ω_D :

$$\omega_D = \frac{1}{RC} \approx 12,563 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

Należy jeszcze obliczyć maksymalną częstotliwość sygnału modulującego. Korzystamy z reguły Carsona:

$$B_{PM} = 2(\Delta\Theta_{PM} + 1)f_{\max}$$

W systemie PM dewiacja fazy przyjmuje postać:

$$\Delta\Theta_{\text{PM}} = k_{\text{PM}}|x|_{\text{max}}$$

Uwzględniając wartości liczbowe wyznaczamy dewiację fazy:

$$\Delta\Theta_{\text{PM}} = 3 \text{ rad}$$

Korzystając z reguły Carsona wyznaczamy szukaną wielkość:

$$f_{\text{max}} = \frac{B_{\text{PM}}}{2(\Delta\Theta_{\text{PM}} + 1)} = 5 \text{ kHz}$$

Ponieważ $\omega_{\text{max}}/\omega_{\text{D}} \approx 2,5$, to szukany współczynnik redukcji szumów dla systemu PM wynosi:

$$\rho_{\text{PM}} = 2,1 \approx 3,22 \text{ dB}$$

Na podstawie przeprowadzonej analizy wnioskujemy, że w systemie PM wyjściowy odstęp sygnał-szum zwiększy się o 3,22 dB.

Rozwiązanie 2.23

Na podstawie rozwiązania zamieszczonego w zadaniu 2.21 wnioskujemy, że współczynnik redukcji szumów w systemie FM opisany jest zależnością:

$$\rho_{\text{FM}} = \frac{\left(\frac{\omega_{\text{max}}}{\omega_{\text{D}}}\right)^3}{3\left(\frac{\omega_{\text{max}}}{\omega_{\text{D}}} - \arctan\frac{\omega_{\text{max}}}{\omega_{\text{D}}}\right)}$$

Częstość ω_{D} filtru deemfazy dana zależnością:

$$\omega_{\text{D}} = \frac{1}{RC}$$

po wstawieniu danych liczbowych wynosi:

$$\omega_{\text{D}} = 12,346 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

Częstotliwość sygnału modulującego należy wyznaczyć na podstawie znanej szerokości pasma sygnału zmodulowanego. Zgodnie z regułą Carsona szerokość pasma wyznaczamy z zależności:

$$B_{\text{FM}} = 2(\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_{\text{m}}$$

Dewiacja fazy w systemie FM opisana jest zależnością:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = \frac{k_{\text{FM}}a_{\text{m}}}{f_{\text{m}}}$$

Ponieważ znana jest moc harmonicznego sygnału modulującego, to jego amplituda jest równa:

$$a_{\text{m}} = \sqrt{2P_{\text{x}}}$$

Wyznaczamy zatem częstotliwość sygnału modulującego:

$$f_{\text{m}} = \frac{B - k_{\text{FM}}\sqrt{2P_{\text{x}}}}{2} = 30 \text{ kHz}$$

Parametr $\omega_{\text{m}}/\omega_{\text{D}} \approx 15,27$, zatem zysk wynikający z zastosowania filtrów preemfazy/deemfazy w systemie FM wynosi:

$$\rho_{\text{FM}} = 258,76 \approx 24,13 \text{ dB}$$

Rozwiązanie 2.24

Dla przypadku maksymalnej kompresji słuszna jest zależność:

$$1 + \frac{k_F}{k_{FM}} = \Delta\Theta_{FM}$$

gdzie k_F jest stałą modulatora znajdującego się w pętli sprzężenia zwrotnego, k_{FM} oznacza stałą pierwotnego modulatora generującego sygnał $\varphi_{FM}(t)$, natomiast $\Delta\Theta_{FM}$ jest dewiacją fazy tego sygnału. Zależność ta określa, ile razy zmniejszy się moc szumu wejściowego detektora w porównaniu do układu bez kompresji pasma, wobec czego można napisać, że:

$$1 + \frac{k_F}{k_{FM}} = \Delta\Theta_{FM} = 100 \text{ rad}$$

ponieważ z warunków zadania wynika, że moc szumu wejściowego ma się zmniejszyć o 20 dB (100 razy w skali liniowej).

Po przekształceniach uzyskujemy zależność pozwalającą wyznaczyć stałą modulatora znajdującego się w pętli sprzężenia zwrotnego:

$$k_F = k_{FM}(\Delta\Theta_{FM} - 1)$$

Należy jeszcze obliczyć stałą pierwotnego modulatora FM. W tym celu skorzystamy ze wzoru opisującego dewiację fazy:

$$\Delta\Theta_{FM} = \frac{k_{FM} a_m}{\omega_m}$$

Częstość sygnału modulującego ω_m i jego amplitudę a_m można wyznaczyć, odpowiednio, ze wzorów na moc szumów w jego paśmie:

$$\omega_m = \frac{\pi N_x}{\eta} = 8\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

oraz ze wzoru na moc harmonicznego sygnału modulującego:

$$a_m = \sqrt{2P_x} = 4 \text{ V}$$

Uwzględniając powyższe zależności wzór pozwalający wyznaczyć stałą modulatora znajdującego się w pętli sprzężenia zwrotnego przyjmuje postać:

$$k_F = \frac{\Delta\Theta_{FM} \omega_m}{a_m} (\Delta\Theta_{FM} - 1)$$

Wstawiając wyznaczone wartości otrzymujemy szukaną wartość równą:

$$k_F = 2\pi \cdot 10^7 \text{ rad/s}$$

Rozwiązanie 2.25

Dla odbiornika FM z maksymalną kompresją pasma prawdziwa jest zależność:

$$\gamma_i = \Delta\Theta_{FM} \frac{P_i}{N_i}$$

gdzie sygnałem wejściowym jest szerokopasmowy sygnał zmodulowany FM o szerokości pasma $W_{FM} = 2\Delta\Theta_{FM} \omega_{\max}$. Moc szumu na wejściu detektora FM można wyznaczyć z zależności:

$$N_i = \frac{\eta W_{FM}}{\pi} = \frac{2\eta \Delta\Theta_{FM} \omega_{\max}}{\pi}$$

Nie znamy poziomu widmowej gęstości mocy szumów η , ale wiemy, że moc szumu w paśmie sygnału modulującego wyraża się wzorem:

$$N_x = \frac{\eta \omega_{\max}}{\pi}$$

wobec czego:

$$N_i = 2\Delta\Theta_{\text{FM}} N_x$$

Otrzymaną zależność można podstawić do wzoru na wejściowy odstęp sygnał-szum, uzyskując po jego uproszczeniu następujący wzór:

$$\gamma_i = \frac{P_i}{2N_x}$$

Ponieważ moc sygnału wejściowego jest równa mocy sygnału zmodulowanego FM, zatem:

$$P_i = \frac{A_0^2}{2}$$

Końcowa zależność przyjmie postać:

$$\gamma_i = \frac{A_0^2}{4N_x}$$

Po wstawieniu danych liczbowych uzyskujemy poszukiwaną wartość wejściowego odstępu sygnał-szum równą:

$$\gamma_i = 10^4 = 40 \text{ dB}$$

Rozwiązanie 2.26

Oznaczmy wejściowy odstęp sygnał-szum bez stosowania układu z kompresją pasma jako:

$$\gamma_i = \frac{P_i}{N_i}$$

gdzie:

$$N_i = \frac{\eta W_{\text{FM}}}{\pi}$$

Dla układu z kompresją pasma wejściowy odstęp sygnał-szum definiujemy jako:

$$\gamma_i' = \frac{P_i}{N_i'}$$

gdzie moc szumu na wejściu opisana jest zależnością :

$$N_i' = \frac{\eta W_F}{\pi}$$

Parametr W_F w powyższym wzorze jest szerokością pasma przepustowego wewnętrznego filtra przeddetekcyjnego. Z danych zawartych w zadaniu wynika, że odstęp sygnał-szum ma się zwiększyć o 10 dB, tak więc:

$$\Delta = \frac{\gamma_i'}{\gamma_i} = 10 \text{ dB}$$

Zatem przy niezmienionej mocy sygnału zmodulowanego słuszna jest zależność:

$$\frac{W_{\text{FM}}}{W_{\text{F}}} = \frac{B_{\text{FM}}}{B_{\text{F}}} = 10$$

Uwzględniając regułę Carsona znajdujemy poszukiwaną dewiację fazy:

$$B_{\text{FM}} = 10B_{\text{F}} = 2(\Delta\Theta_{\text{FM}} + 1)f_{\text{m}}$$

Z rysunku odczytujemy, że szerokość pasma wewnętrznego filtra przeddetekcyjnego wynosi $B_{\text{F}} = 30$ kHz, natomiast częstotliwość sygnału modulującego $f_{\text{m}} = 5$ kHz. Podstawiając dane do wzoru, wyznaczamy poszukiwaną wartość dewiacji fazy równą:

$$\Delta\Theta_{\text{FM}} = 29 \text{ rad}$$

Rozwiązanie 2.27

Okresowa funkcja pomocnicza $f(x) = \text{Asgn}(\cos x)$ posiada rozwinięcie w trygonometryczny szereg Fouriera:

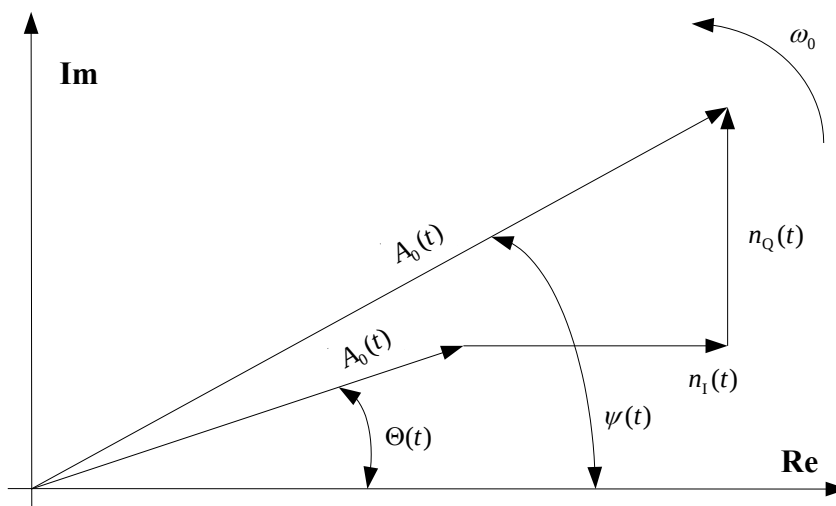
$$f(x) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x + \dots \right)$$

Sygnał wejściowy ogranicznika amplitudy jest sumą sygnału modulacji FM oraz szumu wąskopasmowego:

$$\varphi_i(t) = \varphi_{\text{FM}}(t) + n_i(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \Theta(t)] + n_i(t) \cos \omega_0 t - n_Q(t) \sin \omega_0 t$$

gdzie $\Theta(t)$ jest odchyłką kąta fazowego wprowadzaną przez modulację, a $n_i(t)$ i $n_Q(t)$ odpowiednio składową synfazową i kwadraturową szumu wąskopasmowego.

Rysunek R.39 przedstawia wykres wskazowy sygnału wejściowego ogranicznika amplitudy.



Rysunek R.39

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych można udowodnić, że sygnał wejściowy ogranicznika amplitudy przedstawia się w postaci:

$$\varphi_i(t) = A_0(t) \cos[\omega_0 t + \psi(t)]$$

gdzie $A_0(t)$ i $\psi(t)$ są odpowiednio zaszumioną obwiednią sygnału wejściowego oraz odchyłką modulacyjną kąta fazowego.

Ponieważ $A_0(t) \geq 0$, to sygnał wyjściowy ogranicznika amplitudy przyjmuje postać:

$$\varphi_0(t) = \text{Asgn}\{\cos[\omega_0 t + \psi(t)]\}$$

a po wykorzystaniu rozwinięcia w szereg Fouriera:

$$\varphi_0(t) = \frac{4A}{\pi} \left\{ \cos[\omega_0 t + \psi(t)] - \frac{1}{3} \cos 3[\omega_0 t + \psi(t)] + \dots \right\}$$

Filtr pasmowoprzepustowy odfiltruje pozapasmowe składniki sygnału wyjściowego ogranicznika skupione wokół częstotliwości $3\omega_0$, $5\omega_0 \dots$, jeżeli tylko dewiacja częstotliwości nie będzie zbyt duża. Możemy zatem przyjąć, że warunkiem poprawnej pracy filtracji sygnału wyjściowego ogranicznika jest, aby widma skupione wokół częstotliwości ω_0 i $3\omega_0$ były rozłączne:

$$\omega_0 + \Delta\omega_{\text{FM}} < 3\omega_0 - 3\Delta\omega_{\text{FM}}$$

$$2\Delta\omega_{\text{FM}} < \omega_0$$

Warunek ten jest w praktyce zawsze spełniony, gdyż częstotliwość nośna jest zazwyczaj wielokrotnie większa od dewiacji częstotliwości. Ogranicznik amplitudy eliminuje jeszcze przed procesem detekcji część szumu kanałowego zakłócającą stałą pierwotnie amplitudę sygnału zmodulowanego

4.3. MODULACJE IMPULSOWEGO SYGNAŁU NOŚNEGO

Rozwiązanie 3.1

Spełniony jest oczywiście związek:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

Z zasady próbkowania idealnego wynika, że:

$$X(\omega) = T \Pi_{2W}(\omega) X_s(\omega)$$

gdzie $X_s(\omega)$ jest widmem sygnału próbkowania idealnego:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT).$$

Łącząc ostatnie dwie zależności otrzymujemy:

$$Y(\omega) = X_s(\omega) T \Pi_{2W}(\omega) H(\omega)$$

Przechodzimy do dziedzin czasu:

$$y(t) = T F^{-1} \{X_s(\omega)\} * F^{-1} \{\Pi_{2W}(\omega) H(\omega)\}$$

Druga transformata odwrotna jest równa z definicji odpowiedzi impulsowej $h_{2W}(t)$ filtru $H(\omega)$ o usuniętych składowych widmowych powyżej $|\omega| > W$.

W dalszym ciągu mamy:

$$y(t) = \left[T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] * h_{2W}(t)$$

Ostatecznie:

$$y(t) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h_{2W}(t - nT)$$

Rozwiązanie 3.2

Z założeń zadania wynika, że $|x(\tau + nT)| \leq M$ dla dowolnych τ, n, T . Z zależności (i) otrzymujemy:

$$\left| \dot{x}\left(\tau + \frac{T}{2}\right) \right| \leq WM \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2} = WM$$

gdyż:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2} = 1$$

na mocy zależności (ii) dla $\alpha = \pi/2$. Ponieważ τ oraz T są zupełnie dowolne, to z faktu, że:

$$\left| \dot{x}\left(\tau + \frac{T}{2}\right) \right| \leq WM$$

wynika, że:

$$|\dot{x}(t)| \leq WM$$

Nierówność Bernsteina można udowodnić w sposób bardziej bezpośredni. Ponieważ:

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

zatem:

$$\begin{aligned} |\dot{x}(t)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |j\omega| |X(\omega)| e^{j\omega t} d\omega \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |\omega| |X(\omega)| e^{j\omega t} d\omega \leq \frac{W}{2\pi} \int_{-W}^W |X(\omega)| d\omega \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że podobnie:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

a więc:

$$|x(t)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |X(\omega)| d\omega$$

Podstawiając:

$$|x(t)| \leq M = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W |X(\omega)| d\omega$$

w ograniczeniu na pochodną sygnału $\dot{x}(t)$, otrzymujemy nierówność Bernsteina. Nierówność Bernsteina wyraża fakt, że sygnał o ograniczonym zakresie zmienności, zajmujący skończone pasmo nie może zmieniać się dowolnie szybko.

Rozwiązanie 3.3

Wykładniczy szereg Fouriera funkcji $e^{j\omega t}$ przyjmuje postać (zwróćmy uwagę, że $\omega_0 = 2\pi/2W = \pi/W = T$):

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{jnT\omega} \\ |\omega| &\leq W \end{aligned}$$

Współczynniki szeregu Fouriera wynoszą:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} e^{-jnT\omega} d\omega = \frac{\sin W(t - nT)}{W(t - nT)}$$

i są funkcjami czasu $A_n = A_n(t)$. Szereg Fouriera funkcji $e^{j\omega t}$ podstawiamy w całce odwrotnego przekształcenia Fouriera:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) e^{jnT\omega} \right] d\omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin W(t - nT)}{W(t - nT)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{jnT\omega} d\omega \right] \end{aligned}$$

Ponieważ:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{jnT\omega} d\omega = x(nT)$$

zatem:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{Sa}W(t - nT)$$

Rozwiązanie 3.4

Wykładniczy szereg Fouriera funkcji $e^{j\omega t}/H(\omega)$ w przedziale $\omega \in [-W, W]$ przyjmuje postać:

$$\frac{e^{j\omega t}}{H(\omega)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) e^{jnT\omega}$$

Współczynniki rozwinięcia dane są zależnością:

$$A_n(t) = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \frac{e^{-jnT\omega}}{H(\omega)} e^{j\omega t} d\omega = f(t - nT)$$

Łącząc ostatnie dwie zależności, otrzymujemy:

$$e^{j\omega t} = H(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT) e^{jnT\omega}$$

Ostatni związek wprowadzamy do całki odwrotnego przekształcenia Fouriera:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H(\omega) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT) e^{jnT\omega} \right] d\omega$$

Zamieniamy kolejność całkowania i sumowania:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H(\omega) e^{jnT\omega} d\omega \right]$$

Całka:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H(\omega) e^{jnT\omega} d\omega$$

wyznacza wartości próbek $y(nT)$ sygnału wyjściowego filtru. Ostatecznie otrzymujemy:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) f(t - nT)$$

W rozważanym przykładzie możemy stwierdzić, że sygnał $y(t)$ powstaje w wyniku przekształcenia:

$$y(t) = x(t) * \alpha 1(t) e^{-\alpha t}$$

a więc jest sygnałem wyjściowym filtru o transmitancji:

$$h(t) = \alpha 1(t) e^{-\alpha t} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha + j\omega}$$

Wyliczamy odpowiedź impulsową $f(t)$:

$$f(t) = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \left(1 + \frac{j\omega}{\alpha} \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{Wt \cos Wt + (Wt - 1) \sin Wt}{W\alpha t^2}$$

a zatem:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n y(nT) \frac{(Wt - n\pi)(\cos Wt + \sin Wt) - \sin Wt}{\alpha(Wt - n\pi)^2}$$

Rozwiązanie 3.5

Wyznaczamy najpierw wykładniczy szereg Fouriera dla funkcji $Y_k(\omega, t) e^{j\omega t}$, $k = 1, 2$ w przedziale $-W \leq \omega \leq 0$:

$$Y_k(\omega, t) e^{j\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(k, t) e^{jnT\omega}$$

$$\begin{aligned} k &= 1, 2 \\ -W &\leq \omega \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{iv})$$

Korzystając z okresowości funkcji $Y_k(\omega, t) = Y_k(\omega, t - nT)$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \varphi_k(k, t) &= \frac{1}{W} \int_{-W}^0 Y_k(\omega, t - nT) e^{j\omega(t-nT)} d\omega = y_k(t - nT) \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ k &= 1, 2 \end{aligned}$$

Dysponując szeregiem Fouriera (iv) możemy udowodnić kolejny związek:

$$\begin{aligned} e^{j\omega t} &= H_1(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t - nT) e^{jnT\omega} + H_2(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(t - nT) e^{jnT\omega} \\ |\omega| &\leq W \end{aligned} \quad (\text{v})$$

Przemnożmy w tym celu obustronnie pierwsze równanie układu (iii) przez $e^{j\omega t}$ oraz uwzględnijmy rozkład w szereg Fouriera (iv) – stwierdzamy, że związek (v) jest spełniony dla $-W \leq \omega \leq 0$. Ważność związku (v) dla pozostałego przedziału częstotliwości $0 \leq \omega \leq W$ można wykazać mnożąc drugie równanie układu (iii) przez $e^{j\omega t}$ i ponownie wykorzystując szereg Fouriera (iv):

$$e^{j(\omega+W)t} = H_1(\omega+W) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t - nT) e^{jnT\omega} + H_2(\omega+W) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(t - nT) e^{jnT\omega}$$

Ponieważ:

$$e^{jnT(\omega+W)} = e^{jnT\omega}$$

a więc także:

$$e^{j(\omega+W)t} = H_1(\omega+W) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t - nT) e^{jnT(\omega+W)} + H_2(\omega+W) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(t - nT) e^{jnT(\omega+W)}$$

Powyższa zależność ponownie obowiązuje dla $-W \leq \omega \leq 0$, ale ponieważ $0 \leq \omega \leq W$, to wnioskujemy, że związek (v) zachowuje swą ważność dla $-W \leq \omega \leq W$. Prawą stronę związku (v) podstawiamy do całki odwrotnego przekształcenia Fouriera:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) \left[H_1(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t - nT) e^{jnT\omega} + H_2(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(t - nT) e^{jnT\omega} \right] d\omega \end{aligned}$$

Po zamianie kolejności całkowania oraz sumowania otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_1(t - nT) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H_1(\omega) e^{jnT\omega} d\omega \right] + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_2(t - nT) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H_2(\omega) e^{jnT\omega} d\omega \right] \end{aligned}$$

Wystarczy teraz zauważyć, że:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\omega) H_k(\omega) e^{jnT\omega} d\omega &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W G_k(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]_{t=nT} = g_k(nT) \\ k &= 1, 2 \end{aligned}$$

aby móc zakończyć dowód uogólnionego twierdzenia o próbkowaniu wyrażonego związkami (i), (ii) oraz (iii).

Zajmiemy się teraz wyrażeniem przebiegu sygnału $x(t)$ poprzez próbki sygnału $x(nT)$ oraz próbki jego pochodnej $\dot{x}(nT)$ pobierane z okresem $T = 2\pi/W$. W tym przypadku:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= x(t) & H_1(\omega) &= 1 \\ g_2(t) &= \dot{x}(t) & H_2(\omega) &= j\omega \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{cases} Y_1(\omega, t) + j\omega Y_2(\omega, t) = 1 \\ Y_1(\omega, t) + j(\omega + W)Y_2(\omega, t) = e^{j\omega t} \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań są funkcje:

$$\begin{aligned} Y_1(\omega, t) &= 1 - \frac{\omega}{W}(e^{j\omega t} - 1) \\ Y_2(\omega, t) &= \frac{1}{jW}(e^{j\omega t} - 1) \end{aligned}$$

którym zgodnie z zależnością (ii) odpowiadają przebiegi:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{4 \sin^2 \frac{Wt}{2}}{W^2 t^2} \\ y_2(t) &= \frac{4 \sin^2 \frac{Wt}{2}}{W^2 t^2} \end{aligned}$$

Korzystając z uogólnionego twierdzenia o próbkowaniu (i) otrzymujemy poszukiwaną reprezentację sygnału $x(t)$ poprzez próbki sygnału $x(nT)$ oraz próbki jego pochodnej $\dot{x}(nT)$:

$$x(t) = 4 \sin^2 \frac{Wt}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{x(nT)}{(Wt - 2n\pi)^2} + \frac{\dot{x}(nT)}{W(Wt - 2n\pi)} \right]$$

W drugim rozważanym przypadku, gdy pobieramy dwie sąsiadujące ze sobą próbki $x(nT + \tau)$ oraz $x(nT - \tau)$, $|\tau| < T/2$, możemy przyjąć, że:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= x(t + \tau) & H_1(\omega) &= e^{j\omega\tau} \\ g_2(t) &= \dot{x}(t + \tau) & H_2(\omega) &= e^{-j\omega\tau} \end{aligned}$$

oraz:

$$\begin{cases} e^{j\omega\tau} Y_1(\omega, t) + e^{-j\omega\tau} Y_2(\omega, t) = 1 \\ e^{j(\omega+W)\tau} Y_1(\omega, t) + e^{-j(\omega+W)\tau} Y_2(\omega, t) = e^{j\omega t} \end{cases}$$

Z powyższego układu równań wyznaczamy dwie niewiadome funkcje $Y_1(\omega, t)$ oraz $Y_2(\omega, t)$, a następnie – zgodnie z zależnością (ii) – odpowiadające im przebiegi $y_1(t)$ oraz $y_2(t)$. Sygnał $x(t)$ jest opisany następującą zależnością:

Rozwiązanie 3.6

Zgodnie z twierdzeniem Nyquista częstotliwość próbkowania musi być co najmniej dwa razy większa od maksymalnej częstotliwości sygnału. Sygnały x_1, x_2, x_3 należy próbkować z częstotliwością $f_0' = 2 \cdot 10 \text{ kHz} = 20 \text{ kHz}$, natomiast sygnał x_4 z częstotliwością $f_0'' = 2 \cdot 11 \text{ kHz} = 22 \text{ kHz}$.

Przeanalizujemy dwa sposoby próbkowania sygnałów przedstawione na rysunku 3.1.

Ad. a)

Każdy sygnał jest próbkowany tylko raz, dlatego częstotliwość wirowania komutatora f_0 musi być zgodna z prawem Nyquista. Częstotliwość obrotów komutatora wystarczająca dla próbkowania wszystkich sygnałów wynosi zatem:

$$f_0 = 22 \text{ kHz}$$

Pasma sygnału zwielokrotnionego czasowo (ang. *Time Division Multiplex*) wynosi:

$$B_{\text{TDM}} = \frac{Nf_0}{2}$$

gdzie N jest liczbą zwielokrotnianych sygnałów. W rozważanym przypadku $N = 4$, zatem:

$$B_{\text{TDM}} = 44 \text{ kHz}$$

Ad. b)

Każdy sygnał próbkowany jest dwukrotnie w jednym cyklu komutatora, dlatego efektywna częstotliwość próbkowania jest dwa razy wyższa niż częstotliwość wirowania komutatora. Na jej wybór ponownie wpływa x_4 :

$$f_0 = 11 \text{ kHz}$$

Ponieważ wykorzystywanych jest $N = 8$ wejść komutatora, dlatego:

$$B_{\text{TDM}} = \frac{Nf_0}{2} = 44 \text{ kHz}$$

W obydwóch przypadkach szerokość pasma jest taka sama.

Rozwiązanie 3.7

Częstotliwość próbkowania sygnałów x_1, x_2 wynosi $f_0 = 8 \text{ kHz}$, natomiast sygnału $x_3 - f_0'' = 16 \text{ kHz}$. Szerokość pasma sygnału zwielokrotnionego czasowo dla tradycyjnego rozwiązania komutatora wynosi:

$$B_{\text{TDM}} = \frac{Nf_0''}{2} = 24 \text{ kHz}$$

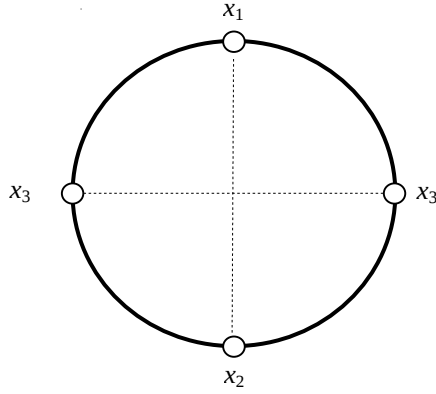
Tradycyjny komutator współpracujący z filtrem o szerokości pasma $B = 20 \text{ kHz}$ nie zapewni prawidłowego zwielokrotnienia czasowego rozważanych sygnałów. Z rozwiązania zadania 3.1 wynika, że efektywna częstotliwość próbkowania sygnału staje się wyższa, jeśli w cyklu komutatora jest on próbkowany więcej niż jeden raz. Wobec tego wskazanym jest rozwiązanie komutatora, w którym sygnały x_1, x_2 będą spróbkowane jeden raz w taktie, a x_3 dwa razy. Zatem częstotliwość próbkowania dla takiego przypadku:

$$f_0 = 8 \text{ kHz}$$

Szerokość pasma sygnału zwielokrotnionego czasowo dla $N = 4$:

$$B_{\text{TDM}} = 16 \text{ kHz}$$

jest mniejsza od szerokości pasma filtra $B = 20 \text{ kHz}$. Komutator o budowie pokazanej na rysunku R.40 zapewnia prawidłowe zwielokrotnianie czasowe.



Rysunek R.40

Rozwiązanie 3.8

Częstotliwość próbkowania sygnałów $x_1, \dots, x_6$ wynosi $f_0 = 8$ kHz, natomiast sygnałów $x_7, \dots, x_{12}$ – $f_0'' = 30$ kHz. Szerokość pasma sygnału zwielokrotnionego czasowo dla tradycyjnego rozwiązania komutatora wynosi:

$$B_{\text{TDM}} = \frac{Nf_0''}{2} = 180 \text{ kHz}$$

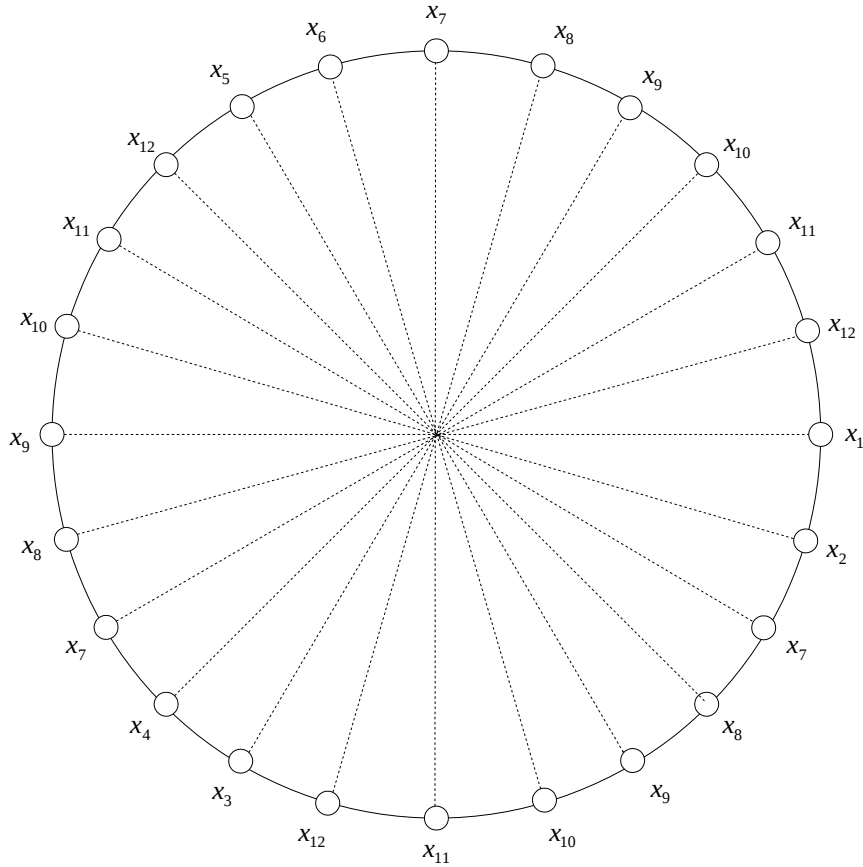
Tradycyjny komutator współpracujący z filtrem o szerokości pasma $B = 140$ kHz nie zapewni prawidłowego zwielokrotnienia czasowego rozważanych sygnałów. Z rozwiązania zadania 3.6 wynika, że efektywna częstotliwość próbkowania sygnału staje się wyższa, jeśli w cyklu komutatora jest on próbkowany więcej niż jeden raz. Wobec tego wskazanym jest rozwiązanie komutatora, w którym sygnały $x_1, \dots, x_6$ będą próbkowane jeden raz w takcie, a sygnały $x_7, \dots, x_{12}$ trzy razy. Zatem częstotliwość próbkowania dla takiego przypadku:

$$f_0 = 10 \text{ kHz}$$

Szerokość pasma sygnału zwielokrotnionego czasowo dla $N = 24$:

$$B_{\text{TDM}} = 120 \text{ kHz}$$

jest mniejsza od szerokości pasma filtra $B = 140$ kHz. Komutator o budowie pokazanej na rysunku R.41 zapewnia prawidłowe zwielokrotnianie czasowe.



Rysunek R.41

Rozwiązanie 3.9

Odstęp sygnał-szum na wejściu detektora jest dany zależnością:

$$\gamma_i = \frac{P_i}{N_i} = \frac{P_i}{\frac{1}{\pi} \int_{W_{AM}} \eta d\omega}$$

Wyznaczamy szerokość pasma sygnału AM:

$$B_{AM} = \frac{P_i}{2\gamma_i \eta} = 200 \text{ kHz}$$

Szerokość pasma sygnału AM jest równa dwukrotnej szerokości pasma sygnału modulującego TDM, zatem:

$$B_{TDM} = \frac{B_{AM}}{2} = 100 \text{ kHz}$$

Ponadto wiemy, że:

$$B_{TDM} = \frac{Nf_0}{2}$$

skąd:

$$f_0 = \frac{2B_{TDM}}{N} = 10 \text{ kHz}$$

Rozwiązanie 3.10

Odstęp sygnał-szum na wejściu detektora jest dany zależnością:

$$\gamma_i = \frac{P_i}{N_i} = \frac{P_i}{\frac{1}{\pi} \int_{W_F} \eta d\omega}$$

gdzie W_F jest szerokością pasma sygnału zmodulowanego FM po kompresji (na wejściu do detektora). Wiemy, że:

$$P_i = \frac{A_0^2}{2}$$

Dla maksymalnej kompresji szerokość pasma sygnału zmodulowanego na wejściu detektora:

$$W_F = 2W_{TDM} = 4\pi B_{TDM}$$

Wejściowy odstęp sygnał-szum możemy wyrazić jako:

$$\gamma_i = \frac{A_0^2}{8B_{TDM}\eta}$$

Zatem szerokość pasma sygnału:

$$B_{TDM} = \frac{A_0^2}{4\gamma_i\eta} = 100 \text{ kHz}$$

natomiast częstotliwość próbkowania:

$$f_0 = \frac{2B_{TDM}}{N} = 10 \text{ kHz}$$

Rozwiązanie 3.11

Widmo sygnału próbkowania chwilowego (jego wszystkie segmenty) są zniekształcone przez obwiednię:

$$\frac{\tau}{T} \text{Sa} \frac{\omega\tau}{2} = \varepsilon \text{Sa} \frac{\omega\tau}{2}$$

Segment pierwszy zajmuje pasmo częstotliwości $[\omega_{\max}; 3\omega_{\max}]$, gdzie $2\omega_{\max} = \omega_0$ jest częstotliwością próbkowania.

Zgodnie z zasadą pomiaru poziomu efektu apertury należy wyznaczyć przyrost tłumienności:

$$20 \log \text{Sa} \frac{\omega\tau}{2} \Big|_{\omega=2\omega_{\max}} - 20 \log \text{Sa} \frac{\omega\tau}{2} \Big|_{\omega=3\omega_{\max}} = 20 \log \text{Sa} \pi - 20 \log \text{Sa} \frac{3\pi}{2} \approx 13,5 \text{ dB}$$

Efekt apertury jest znacznie silniejszy aniżeli dla wstęgi centralnej.

LITERATURA

- [1] Gregg W. D. : *Podstawy modulacji analogowej i cyfrowej*. Warszawa, WNT 1983.
- [2] Haykin S.: *Systemy telekomunikacyjne*. WKiŁ 2004.
- [3] Izydorczyk J., Płonka G., Tyma G.: *Teoria sygnałów. Teoria, przykłady, zadania*. Helion, Gliwice 1999.
- [4] Knoch L., Ekiert T.: *Modulacja i detekcja*. Warszawa, WKiŁ 1979.
- [5] Lathi B. P.: *Systemy telekomunikacyjne*. Warszawa, WNT 1972.
- [6] Ozimek E.: *Podstawy teoretyczne analizy widmowej sygnałów*. Warszawa, PWN 1985.
- [7] Papir Z.: *Podstawy modulacji i detekcji*. Kraków, Wydawnictwa AGH 1992.
- [8] Papir Z.: *Analiza częstotliwościowa sygnałów*. Kraków, Wydawnictwa AGH 1995.
- [9] Roden M. S.: *Systemy telekomunikacyjne analogowe i cyfrowe*. Warszawa, WNT 1983.
- [10] Szabatin J.: *Podstawy teorii sygnałów*. Warszawa, WKiŁ 2003.
- [11] Wojnar A.: *Teoria sygnałów*. Warszawa, WNT 1980.

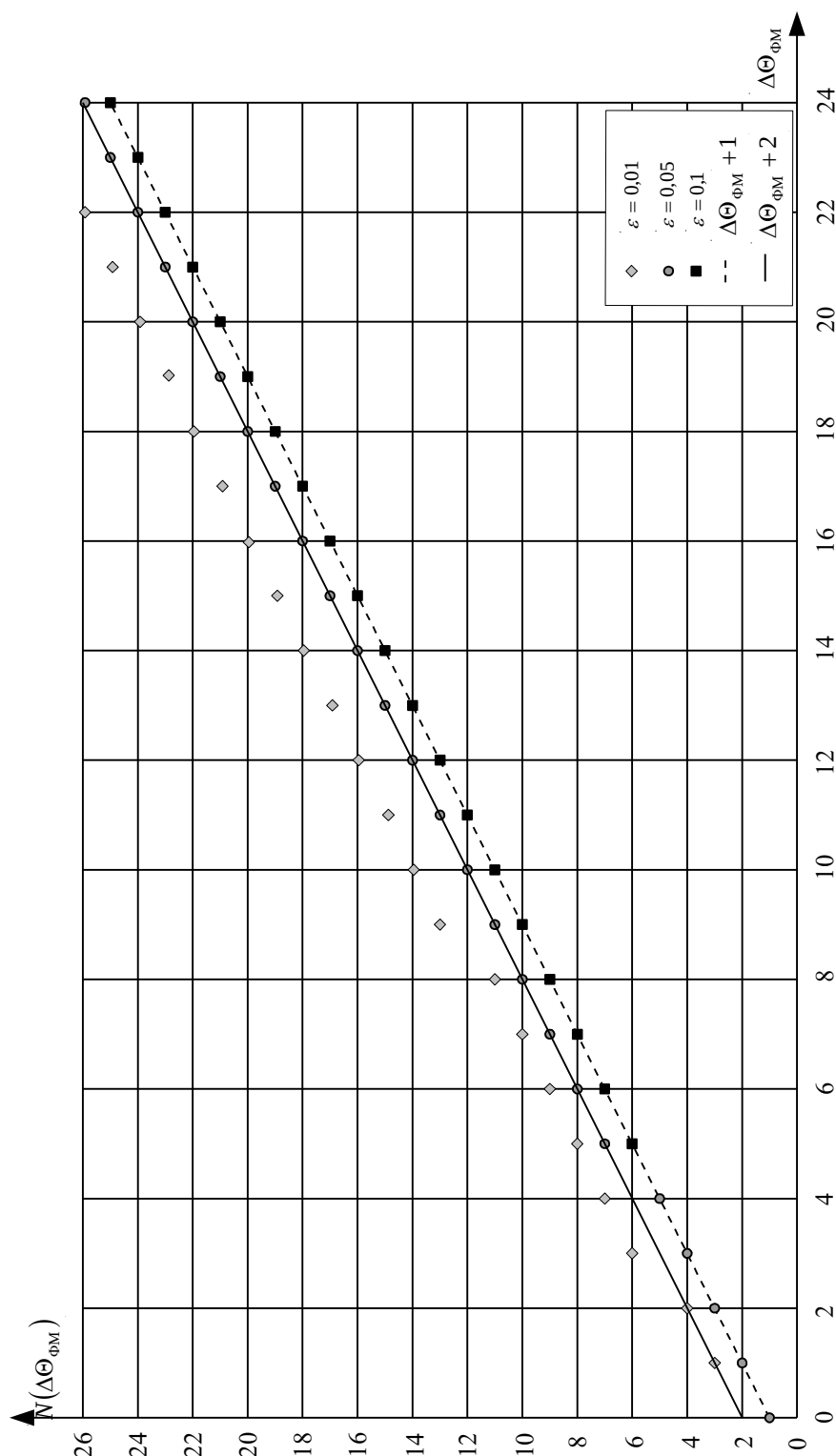
DODATEK A

Wartości funkcji Bessela pierwszego rodzaju $J_n(\Delta\Theta_{\Phi M})$

$\Delta\Theta_{\Phi M}$	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
0,0	1,00										
0,2	0,99	0,10									
0,4	0,96	0,20									
0,6	0,91	0,29	0,04								
0,8	0,85	0,37	0,08	0,01							
1,0	0,77	0,44	0,11	0,02							
1,2	0,67	0,50	0,16	0,03	0,01						
1,4	0,57	0,54	0,21	0,05	0,01						
1,6	0,46	0,57	0,26	0,07	0,01						
1,8	0,34	0,58	0,31	0,10	0,02						
2,0	0,22	0,58	0,35	0,13	0,03	0,01					
2,2	0,11	0,56	0,40	0,16	0,05	0,01					
2,4	0,00	0,52	0,43	0,20	0,06	0,02					
2,6	-0,10	0,47	0,46	0,24	0,08	0,02	0,01				
2,8	-0,19	0,41	0,48	0,27	0,11	0,02	0,01				
3,0	-0,26	0,34	0,49	0,31	0,13	0,04	0,01				
3,2	-0,32	0,26	0,48	0,34	0,16	0,06	0,02				
3,4	-0,36	0,18	0,47	0,37	0,19	0,07	0,02	0,01			
3,6	-0,39	0,10	0,44	0,40	0,22	0,09	0,03	0,01			
3,8	-0,40	0,01	0,41	0,42	0,25	0,11	0,04	0,01			
4,0	-0,40	-0,07	0,36	0,43	0,28	0,13	0,05	0,02			
4,2	-0,38	-0,14	0,31	0,43	0,31	0,16	0,06	0,02	0,01		
4,4	-0,34	-0,20	0,25	0,43	0,34	0,18	0,08	0,03	0,01		
4,6	-0,30	-0,26	0,80	0,42	0,36	0,21	0,09	0,03	0,01		
4,8	-0,24	-0,30	0,12	0,40	0,38	0,23	0,11	0,04	0,01		
5,0	-0,18	-0,33	0,05	0,36	0,39	0,26	0,13	0,05	0,02	0,01	
5,2	-0,11	-0,34	-0,02	0,33	0,40	0,29	0,15	0,07	0,02	0,01	
5,4	-0,04	-0,35	-0,09	0,28	0,40	0,31	0,18	0,08	0,03	0,01	
5,6	0,03	-0,33	-0,15	0,23	0,39	0,33	0,20	0,09	0,04	0,01	
5,8	0,09	-0,31	-0,20	0,17	0,38	0,35	0,22	0,11	0,05	0,02	0,01
6,0	0,15	-0,28	-0,24	0,11	0,36	0,36	0,25	0,13	0,06	0,02	0,01
6,2	0,20	-0,23	-0,28	0,05	0,33	0,37	0,27	0,15	0,07	0,03	0,01
6,4	0,24	-0,18	-0,30	-0,01	0,29	0,37	0,29	0,17	0,08	0,03	0,01
6,6	0,27	-0,12	-0,31	-0,06	0,25	0,37	0,31	0,19	0,10	0,04	0,01
6,8	0,29	-0,07	-0,31	-0,12	0,21	0,36	0,33	0,21	0,11	0,05	0,02
7,0	0,30	-0,00	-0,30	-0,17	0,16	0,35	0,34	0,23	0,13	0,06	0,02
7,2	0,30	0,05	-0,28	-0,21	0,11	0,33	0,35	0,25	0,15	0,07	0,03
7,4	0,28	0,11	-0,25	-0,24	0,05	0,30	0,35	0,27	0,16	0,08	0,04
7,6	0,25	0,16	-0,21	-0,27	-0,00	0,27	0,35	0,29	0,18	0,10	0,04
7,8	0,22	0,20	-0,16	-0,29	-0,06	0,23	0,35	0,31	0,20	0,11	0,05
8,0	0,17	0,23	-0,11	-0,29	-0,11	0,19	0,34	0,32	0,22	0,13	0,06
8,2	0,12	0,26	-0,06	-0,29	-0,15	0,14	0,32	0,33	0,24	0,14	0,07
8,4	0,07	0,27	-0,00	-0,27	-0,19	0,09	0,30	0,34	0,26	0,16	0,08
8,6	0,01	0,27	-0,05	-0,25	-0,22	0,04	0,27	0,34	0,28	0,18	0,10
8,8	0,04	0,26	0,10	-0,22	-0,25	-0,01	0,24	0,34	0,29	0,20	0,11
9,0	-0,09	0,25	0,14	-0,18	-0,27	-0,06	0,20	0,33	0,31	0,21	0,12
9,2	-0,14	0,22	0,18	-0,14	-0,27	-0,10	0,16	0,31	0,31	0,23	0,14
9,4	-0,18	0,18	0,22	-0,09	-0,27	-0,14	0,12	0,30	0,32	0,25	0,16
9,6	-0,21	0,14	0,24	-0,04	-0,26	-0,18	0,08	0,27	0,32	0,27	0,17
9,8	-0,23	0,09	0,25	0,01	-0,25	-0,21	0,03	0,25	0,32	0,28	0,19
10,0	-0,25	0,04	0,25	0,06	-0,22	-0,23	-0,01	0,22	0,32	0,29	0,21

DODATEK B – KRYTERIUM AMPLITUDOWE

Kryterium amplitudowe umożliwia wyznaczenie liczby prążków istotnych $N(\Delta\Theta_{\Phi M})$ w widmie modulacji kąta fazowego w zależności od dewiacji fazy $\Delta\Theta_{\Phi M}$. Pod uwagę brane są tylko te prążki, dla których wartość bezwzględna funkcji Bessela przekracza ustaloną wartość ε (na ogół przyjmuje się $0,01 < \varepsilon < 0,1$).



DODATEK C – KRYTERIUM MOCOWE

Kryterium mocowe umożliwia wyznaczenie liczby prążków istotnych $N(\Delta\Theta_{\Phi_M})$ w widmie modulacji kąta fazowego w zależności od dewiacji fazy $\Delta\Theta_{\Phi_M}$. Pod uwagę branych jest tyle prążków, aby moc przesyłanego sygnału była nie mniejsza niż ustalony procent jego mocy całkowitej.

